Spiegelungs- und Drehungs-Gruppen in graphischer Behandlung

mit besonderer Berücksichtigung der kristallographischen Gruppen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde einer Hohen Philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

vorgelegt von

Vitalis Geilen
aus Münster in Westfalen.

Göttingen 1916.

Von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung
der Fakultät als Dissertation angenommen.
Tag der mündlichen Prüfung: 15. November 1916.
Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. C. Runge.

Meiner lieben Frau

und

meinen lieben Eltern

gewidmet.

Faust: „Das Pentagramma macht Dir Pein?“

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548109_0077

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung. Die Aufgabe und ihre bisherige Behandlung; der neue Weg 7

I. Kapitel.

Die Runge'sche graphische Darstellung von Spiegelung und Drehung.

A. Die gnomonische Methode.

§ 1. Die Spiegelung 10
§ 2. Aequivalenz zweier Spiegelungen mit einer Drehung 12
§ 3. Zusammensetzung von Drehungen: Gerade Anzahl von Spiegelungen 16
§ 4. Die Umklappung 19
§ 5. Die Inversion 20
§ 6. Die Drehspiegelung: Ungerade Anzahl von Spiegelungen 22

B. Die stereographische Methode; ihre Aequivalenz mit der gnomonischen Darstellung 25

II. Kapitel.

Die Herleitung der Gruppen.

A. Die elementaren Gruppen.

§ 1. Identität, Spiegelung, Umklappung, Inversion 30
§ 2. Eine Rotationsachse: „Cyklische" Gruppen . . . 31
§ 3. Eine Spiegelachse 33

B. Gruppen mit einer höherzähligen Achse.

§ 4. Zwei Spiegelebenen: Cyclische Gruppen mit vertikaler Symmetrie-Ebene 36
§ 5. Zwei Umklappungsachsen: „Diedergruppen" . . . 37
§ 6. Cyclische Gruppen mit horizontaler Symmetrie-Ebene 39
§ 7. Diedergruppen mit vertikaler Symmetrie-Ebene
a) Symmetrie-Ebenen mit Umklappungsachsen zusammenfallend 40
b) Symmetrie-Ebenen mit Umklappungsachsen abwechselnd 41

C. Gruppen mit mehreren höherzähligen Achsen. Seite

Einleitendes 44
§ 8. Zwei 3-zählige Achsen:
1. Die „Tetraedergruppe“ mit den 6 Nebensymmetrie-Ebenen
a) in I. Stellung 46
b) in II. „ 50
2. Die „Tetraedergruppe“ mit den 3 Hauptsymmetrie-Ebenen
a) in I. Stellung 52
Zusatz: „Drehspiegelachsen“ und kristallographische „Zwillingsachsen“ . 53
b) in II. Stellung 55
§ 9. Zwei 4-zählige Achsen:
Die „Oktaedergruppe“
a) in I. Stellung 55
b) „ II. „ 60
c) „ III. „ 62
§ 10. Erledigung der Gruppen mit zwei Achsen von höherer Zähligkeit als 5.
1) Zwei geradzählige Achsen 63
2) Zwei ungeradzählige Achsen 65
§ 11. Zwei 5-zählige Achsen:
Die „Ikosaëdergruppe“
a) in I. Stellung: Das „Pentagramm“ . . . 66
b) „ II. „ 71
c) „ III. „ 72

III. Kapitel.

Die Gruppenbilder in allgemeiner Lage.

§ 1. Die Vierergruppe: Das Dreiseit 78
§ 2. Die Oktaëdergruppe: Das Vierseit 79
§ 3. Die Ikosaëdergruppe: Das Pascalsche Sechsseit 81

Anhang.

§ 1. Geschichtliches über das „Hexagrammum mysticum“ 83
Bemerkung über das Zeichen des „Pentagramms“ 84
§ 2. Über frühere graphische Veranschaulichungen von Gruppen 85
§ 3. Über die allgemeinste Gestalt symmetrischer Körper 86

Einleitung.

Die Aufgabe und ihre bisherige Behandlung; der neue Weg.

Seitdem J. Chr. Fr. Hessel im Jahre 1829 als erster alle nach dem „Geseß der rationalen Kantenschnitte“ möglichen Symmetrieklassen von Kristallen hergeleitet hat, ist dieses und das weitergehende rein mathematische Problem, sämtliche überhaupt möglichen Klassen von symmetrisch gebauten Körpern aufzufinden, mehrfach teils von kristallographisch teils von mathematisch interessierter Seite behandelt worden. Es seien hier nur genannt:

A. Bravais, „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique“ (Journal de math. par Liouville, Bd. 14 [1849]),

A. F. Möbius, „Theorie der symmetrischen Figuren“ (Werke Bd. II, Leipzig 1886),

A. Schoenflies, „Krystallsysteme und Krystallstruktur“ (Leipzig 1891).[1])

In der neuesten Zeit sind die 32 kristallographischen Gruppen abgeleitet worden von

H. A. Lorenß, „Über die Symmetrie der Kristalle“ (Abhandlungen über theoretische Physik, Bd. 1, Leipzig 1907),

W. Voigt, „Lehrbuch der Kristallphysik“ (Leipzig 1910),

Saurel „On the classification of crystals“ (Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 17 [1911]),

---

[1]) Man vergleiche auch: F. Klein „Vorlesungen über das Ikosaëder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.“ (Leipzig 1884.)

G. Frobenius, „Gruppentheoretische Ableitung der 32 Kristallklassen“ (Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1911).

Die Erforschung der inneren Struktur der Kristalle, die ja mit der Symmetrie der äußeren Kristallformen in engstem Zusammenhange steht, ist durch M. v. Laue's grundlegende Entdeckungen in dieser Richtung („Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen“, Sitzungsberichte der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften, München 1912) in der allerletzten Zeit wieder in den Vordergrund des wissenschaftlichen Interesses getreten. Und da sollen nun in dieser Schrift auf eine neue, möglichst anschauliche Weise sämtliche Symmetrieklassen der Kristalle und zugleich alle geometrisch möglichen Klassen symmetrischer Körper nochmals hergeleitet werden, indem die **räumlichen Operationen der Spiegelung und Drehung,** die der Symmetrie der Körper zugrunde liegen, **graphisch in der Ebene dargestellt** werden und **mit ihnen nur in der Ebene operiert** wird, und zwar so, daß doch stets der Zusammenhang der ebenen Darstellung mit den ihr im Raume entsprechenden Körpern aufrecht erhalten bleibt.

Die neue Art der graphischen Darstellung hat C. Runge in einem Artikel:

„Über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen auf graphischem Wege“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48 [1903]) entwickelt und schon dort die Anwendbarkeit seiner Methode auf die Symmetriegruppen der Kristalle angedeutet. Späterhin hat er mehrmals in seinen Vorlesungen über „Darstellende Geometrie“ an der Universität in Göttingen (Vgl. besonders die handschriftliche Ausarbeitung der Vorlesung vom W. S. 1910/11 von H. v. Sanden) in eingehender Weise seine auch auf die graphische Darstellung von Spiegelungen ausgedehnte Methode dargelegt.

Im Folgenden wird zuerst die Runge'sche graphische Darstellung einer Spiegelung an einer Ebene auseinandergesetzt und werden die Gesetze der Verknüpfung mehrerer solcher dargelegt; dann werden die übrigen Raumumformungen, die aus Spiegelungen möglich sind, — Drehung und Drehspiegelung, — und die Gesetze ihrer gegenseitigen Abhängigkeit erörtert. Dieser erste Abschnitt der vorliegenden Abhandlung schließt sich naturgemäß eng an die oben genannten Quellen an; nur ist hier nicht die graphische Darstellung der Drehung, sondern die der Spiegelung als Ausgangspunkt genommen und unabhängig von der der Drehung soweit wie möglich für sich ausgenutzt, wodurch vielleicht eine gewisse Vereinfachung in der Entwicklung der Methode erzielt worden ist. Daran schließt sich die Ableitung aller durch Spiegelungen und Drehungen überhaupt möglichen Gruppen, aus denen immer die für die Kristallographie in Betracht kommenden Gruppen ausgesondert werden. Zuerst werden die graphischen Diagramme der Gruppen in spezieller Lage gefunden und im letzten Abschnitt in allgemeiner Lage hergestellt.

I. Kapitel.

Die Runge'sche graphische Darstellung von Spiegelung und Drehung.

A. Die gnomonische Methode.

§. 1. Die Spiegelung.

Denken wir uns um den im Raume bei allen Spiegelungen festbleibenden Punkt als Mittelpunkt eine Kugel mit einer beliebigen Einheit als Radius gelegt, so haben wir nur Spiegelungen an solchen Ebenen zu betrachten, die sämtlich durch den Kugelmittelpunkt gehen [1]), auf der Kugeloberfläche also größte Kreise ausschneiden. Jeder solchen Spiegelebene ordnen wir die Richtung ihrer durch das Zentrum der Kugel gehenden Normalen zu, die die Kugeloberfläche in zwei diametralen Punkten, den beiden Polen der Spiegelebene, trifft (Vgl. Fig. 1). Irgend einem beliebigen Punkt der Kugelfläche, zu dem wir den diametralen Punkt nach Belieben ergänzen können oder nicht,

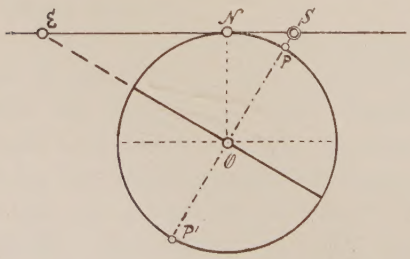


Fig. 1.

[1]) Spiegelungen an Ebenen, die sich nicht alle in einem Punkte schneiden, führen stets zu unendlichen Gruppen von einer Art, die wir hier ausschließen wollen.

entspricht eine Ebene von ganz bestimmter Lage; er kann also, wenn die Ebene als spiegelnd in physikalischem Sinne aufgefaßt wird, als Repräsentant der eindeutig bestimmten räumlichen Umformung des Spiegelns an der zugehörigen Ebene aufgefaßt werden, sodaß jedem Punkt des Raumes ein ganz bestimmter gespiegelter Punkt entspricht. Einen solchen Punkt wollen wir kurz einen „Spiegelpunkt" nennen und mit S bezeichnen. „S" wird also das Symbol für die Operation des Spiegelns und, speziell an einen Punkt der Kugeloberfläche gesetzt, die Spiegelung an der entsprechenden Ebene bedeuten; diese wird dadurch zu einer „Symmetrieebene". Die Punkte dieser Ebene selbst bleiben bei der Operation der Spiegelung in Ruhe.

Die Punkte der Kugeloberfläche wollen wir nun von ihrem Mittelpunkte aus etwa auf die obere horizontale Tangentialebene projizieren (vgl. Fig. 1), die die Kugel also im „Nordpol" N berührt, wenn wir uns die Kugel als Erdkugel vorstellen und die dort üblichen Bezeichnungen wie Nordpol, Südpol, Erdachse usw. auf unsere Einheitskugel übertragen. Diese spezielle Zentralprojektion, die unter dem Namen „gnomonische Projektion" bekannt ist, überträgt auf die genannte Ebene nur die obere Halbkugel; aber dies Gebiet genügt ja gerade, um jeder beliebigen Symmetrieebene den zugehörigen Spiegelpunkt in der Projektionsebene zuzuweisen.

Nötigenfalls könnte man die Projektionsebene als zweiseitig auffassen, sodaß ihrer unteren Seite die obere Halbkugel entspräche und durch das Unendliche hindurch der unteren Halbkugel die obere Seite, oder besser umgekehrt. Diametrale Kugelpunkte liegen dann auf beiden Seiten der Projektionsebene genau übereinander.

Jedem Spiegelpunkt S entspricht in der Ebene die Projektion oder „Spur" E der zugehörigen Spiegelebene, die zu gegebenem S in der Ebene durch Umlegung leicht zu finden ist, nachdem man den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Projektionsebene als „Distanzkreis" um N

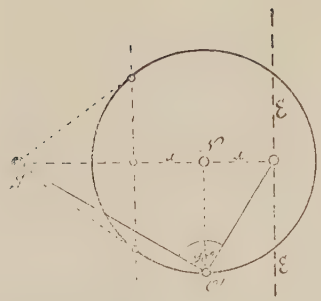


Fig. 2.

in die Ebene eingetragen hat. (Vgl. Fig. 2). Diese Spur E stellt also diejenigen ausgezeichneten Punkte dar, die bei der Spiegelung an S unverändert bleiben. Diese Spur, die auf der Verlängerung der Verbindungsgeraden SN senkrecht steht, ist geometrisch gleich der um N umgeklappten Polaren zu S inbezug auf den Einheitskreis, die wir deshalb hier „Gegenpolare" nennen wollen. Umgekehrt läßt sich zu gegebener Spur in derselben Weise der zugehörige Spiegelpunkt finden.

Jedem Punkt der Ebene entspricht also bei gegebenem Distanzkreis eine ganz bestimmte Umformung des ganzen Raumes, und es lassen sich, wenn nötig, beliebig viele einzelne gespiegelte Punkte durch Umlegung konstruieren. Speziell ist der die Operation der Spiegelung darstellende Punkt S der einzige, der in den nämlichen Punkt der anderen Seite der Projektionsebene übergeht. Jeder Punkt des Raumes kehrt bei zweimaliger Spiegelung an S an seine ursprüngliche Stelle zurück, was sich symbolisch durch die Gleichung

$$S \cdot S = S^2 = 1$$

ausdrücken läßt.

§ 2. Aequivalenz zweier Spiegelungen mit einer Drehung.

Sind nun zwei verschiedene Spiegelpunkte S_1 und S_2 gegeben, so ist festzustellen, wie sich das Ergebnis der Spiegelungen S_1 und S_2 nacheinander ausgeführt, d. h. ihr Produkt $S_1 \cdot S_2$, in der Ebene graphisch darstellt, und welche Umformung des Raumes ihr entspricht. Zeichnen wir zu

S_1 und S_2 die zugehörigen Spuren E_1 und E_2 (vgl. Fig. 3), so stellt ihr Schnittpunkt D die Projektion einer Kugelachse dar, deren Punkte während der beiden Spiegelungen in Ruhe bleiben, da ja die Spurgeraden E_1 und E_2 bei den einzelnen Spiegelungen S_1 und S_2 für sich unverändert bleiben; also kann das Produkt $S_1 \cdot S_2$, da kein anderer Punkt der Kugel in Ruhe geblieben ist, nichts anderes als eine Drehung der Kugel um die Achse D ergeben.

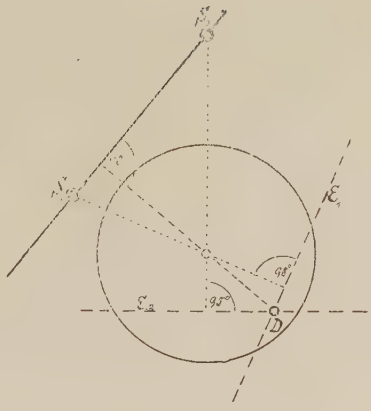


Fig. 3.

Als Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2, die zu ihren Achsen S_1 bezw. S_2 senkrecht stehen, steht die Achse D im Raume senkrecht zur Ebene der beiden Achsen S_1 und S_2. Daraus ersieht man sofort, daß die Verbindungsgerade von S_1 und S_2 die Projektion des größten Kreises ist, der zur Achse D senkrecht steht, was auch in der Ebene elementargeometrisch aus der Gegenpolarität der drei Punkte S_1, S_2, D inbezug auf den Distanzkreis folgt. Nur auf diesem größten Kreise, in der Projektion also auf der Geraden $S_1 S_2$, können sich aber bei einer Drehung um die Achse D die Punkte S_1 und S_2 bewegen, da sich ja alle Punkte einer Kugel bei Drehung um eine Achse auf Kreisen fortbewegen, deren Ebenen zur Rotationsachse senkrecht stehen. Da wiederum durch die Gerade $S_1 S_2$ die Rotationsachse D festgelegt ist, so dürfen wir D nunmehr ausschalten und die Verbindungsgerade zweier Spiegelpunkte als graphische Darstellung einer Drehung um die zu ihrer Ebene senkrechte Rotationsachse auffassen.

Es bleibt nun noch der Winkel der Rotation aus der Lage der Spiegelpunkte in der graphischen Darstellung zu bestimmen.

Legen wir zu dem Zweck die beiden Spiegelebenen so, daß ihre Schnittlinie, d. h. die Rotationsachse, von der Zeichenebene senkrecht geschnitten wird, wobei ihre Spuren durch N gehen und die beiden Spiegelpunkte in den Richtungen der Normalen im Unendlichen liegen (vgl. Fig. 4), so bleibt der Winkel λ, der bei Ebenen und Normalen derselbe ist, in der Projektion unverändert. Führt man dann für einen beliebigen Punkt Q, dessen Radius mit E_1 den Winkel α bildet, am besten für einen Punkt des Einheitskreises, die beiden Spiegelungen S_1 und S_2 aus, so findet man, das Q um die Achse N eine Rotation vom Winkel

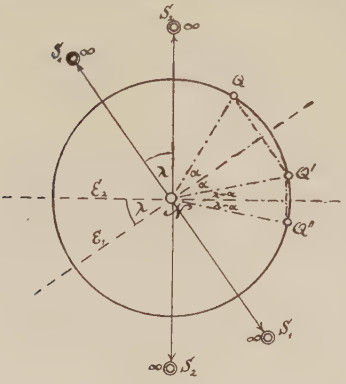


Fig. 4.

$$2\,\alpha + 2\,(\lambda - \alpha) = 2\,\lambda$$

ausgeführt hat, also unabhängig von seiner ursprünglichen Lage um den doppelten Winkel der spiegelnden Ebene bezw. ihrer Normalen rotiert hat.

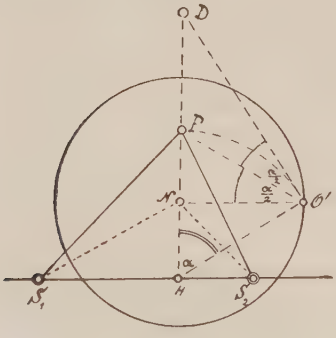


Fig. 5.

Der wahre Winkel dieser beiden in der Ebene durch zwei beliebige Spiegelpunkte dargestellten Normalen, der also gleich dem halben Drehungswinkel ist, läßt sich auch bei allgemeiner Lage in der Projektionsebene finden. (Vgl. Fig. 5.) Man muß dazu die Ebene der drei Punkte S_1, S_2, O, wo O in Wirklichkeit um den Einheitsradius unterhalb der Zeichenebene liegt, um $S_1\,S_2$ als Achse in die Projektionsebene herauf-

klappen, nachdem man von N auf $S_1 S_2$ die Senkrechte N H gefällt hat. Man erhält so einen Punkt P, den wir den „Pol“ der Drehung nennen wollen, von dem aus die Strecke $S_1 S_2$ unter dem halben Rotationswinkel erscheint.

So sind also sämtliche Bestimmungsstücke der zu zwei Spiegelpunkten gehörenden Drehung aus der graphischen Darstellung ablesbar.

Hier wäre sofort zu bemerken, daß der Winkel zweier beliebiger Rotationsachsen, die durch die Punkte D_1 und D_2 gegeben seien, genau ebenso wie der Winkel zweier Spiegelnormalen gefunden werden kann, daß ferner der Winkel N D O′ die Neigung der Rotationsachse gegen die Projektionsebene angibt, der übrigens gleich dem Komplementwinkel der Neigung der Ebene der beiden Spiegelnormalen S_1 N und S_2 N gegen die Zeichenebene ist. Und schließlich ist noch bemerkenswert, daß die Gerade O′ P den Winkel D O′ N halbiert, wie wegen HO′ = HP leicht einzusehen ist. Betrachten wir nun die Strecke $S_1 S_2$ als Drehung, losgelöst von den Spiegelungen, aus denen sie entstanden ist, so ist sie jeder anderen Strecke auf der Geraden $S_1 S_2$ äquivalent, die vom Pol P aus unter demselben Winkel gesehen wird wie jene, während diese Strecken ihrer Länge nach ganz verschieden sind. An die Endpunkte solcher Strecken dürfen wir dann S'_1 und S'_2 schreiben, wobei

$$S_1' \cdot S'_2 = S_1 \cdot S_2$$

ist. In der Tat ist eine Drehung völlig bestimmt durch ein fest verbundenes Spiegelebenenpaar, das noch frei um seine Schnittlinie rotieren darf.

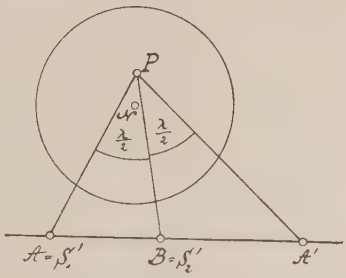


Fig. 6.

Es läßt sich jetzt auch zu jedem Punkt A der Geraden $S_1 S_2$ der durch die Drehung $S_1 \cdot S_2$ aus ihm hervorgehende Punkt A′ konstruieren (vgl. Fig. 6), indem man an die

Verbindungsgerade des Ausgangspunktes A mit dem Pol P den doppelten Winkel der beiden Spiegelebenen anträgt. Der freie Schenkel schneidet die Gerade $S_1 S_2$ im resultierenden Punkte A'. Es ist also zu beachten, daß hier nicht etwa der Spiegelpunkt S'_1 in den Spiegelpunkt S'_2 übergeht, und dieser Umstand wird später zu einer anderen Deutung der graphischen Figur führen, wobei dann in der Tat die Kugeldrehung durch die Überführung des Punktes S_1 in den Punkt S_2 charahterisiert werden wird.

Haben wir bisher die Drehung $S_1 \cdot S_2 = D_{12}$ betrachtet, so ergibt das Produkt mit vertauschten Faktoren die gleiche Drehung in umgekehrter Richtung $S_2 \cdot S_1 = D_{21}$, d. h. also

$$S_1 \cdot S_2 = (S_2 \cdot S_1)^{-1}.$$

Man wird sich also die Drehstrecke nötigenfalls mit einer Richtung versehen denken.

Die Tatsache, daß das Produkt zweier Spiegelungen nicht wieder eine Spiegelung, sondern eine Drehung ergibt, führt zu der Frage, welche weiteren neuartigen Raumumformungen, die wir allgemein „Deckoperationen" nennen wollen, durch die Komposition von Spiegelungen in beliebiger Anzahl entstehen können. Zugleich wird sich dabei der Zusammenhang und die Abhängigkeit der verschiedenen Deckoperationen von einander ergeben.

§ 3. Zusammensetzung von Drehungen: Gerade Anzahl von Spiegelungen.

Sind Spiegelungen in gerader Anzahl zusammenzusetzen, so lassen sich je zwei zu einer Rotation zusammenfassen; das Gesamtergebnis der Einzeloperationen wird also gleichbedeutend mit dem einer Zusammensetzung von Drehungen sein.

Seien also in der Projektionsebene vier beliebige Spiegelpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 gegeben, die in dieser Reihen-

folge mit einander komponiert werden sollen. Zieht man die Geraden $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$, die sich im Endlichen schneiden mögen (vgl. Fig. 7) und verschiebt dann, wie es erlaubt ist, die dem Produkt der Spiegelungen $S_1 \cdot S_2$ und $S_3 \cdot S_4$ entsprechenden Drehstrecken in den zugehörigen Geraden so, daß $S_1 \cdot S_2 = S_1' \cdot S_2'$ und $S_3 \cdot S_4 = S_3' \cdot S_4'$ ist und der Endpunkt S_2' der ersten mit dem Anfangspunkt S_3' der zweiten äquivalenten Strecke in den Schnittpunkt der beiden Geraden zusammenfällt, und bildet nun das Projekt $S_1' \cdot S_2' \cdot S_3' \cdot S_4'$, so heben sich die beiden Spiegelungen S_2' und S_3' an derselben Ebene nach Früherem auf, und es bleibt, da also $S_2' \cdot S_3' = 1$ ist,

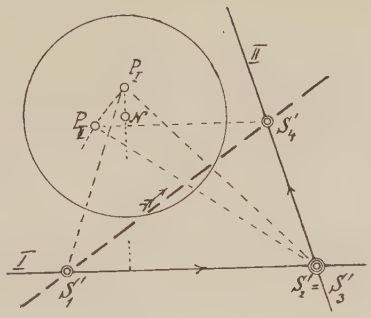


Fig. 7.

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 = S_1' \cdot S_4',$$

also die Zusammensetzung zweier Spiegelungen, die einer einzigen Drehung entspricht. Drehungsachse und Drehungswinkel sind durch die Strecke $S_1' S_4'$ bestimmt.

Die graphische Zusammensetzung von Drehungen geht also ähnlich der geometrischen Addition von Kräften vor sich, nur geht die Resultante nicht durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt.

Tritt ein drittes Spiegelungenpaar S_5, S_6 hinzu, so ergäbe das mit der Rotation $S_1' \cdot S_4'$ komponiert wieder eine einzige Drehung $S_1'' \cdot S_6'$ u. s. f.

Wie nun mehrere Kräfte, die an einem Punkt angreifen, die Resultante Null ergeben, wenn ihre graphische Addition ein geschlossenes Polygon bildet, so ist hier die resultierende Drehung ebenfalls Null, wenn die Drehstrecken, nacheinander komponiert, ein geschlossenes Polygon bilden.

Bemerken wir noch, daß der Schnittpunkt zweier Rotationsgeraden den Durchstoßpunkt derjenigen Kugel-

achse mit der Projektionsebene darstellt, die zur Ebene der beiden zugehörigen Drehungsachsen senkrecht steht.

Bei der graphischen Zusammensetzung zweier Drehungen tritt nun zu Tage, daß ihre Zusammensetzung in umgehrter Reihenfolge ausgeführt ein von dem ersten verschiedenes Resultat ergibt. Das Produkt zweier Drehungen ist in noch höherem Maße von der Reihenfolge der Faktoren abhängig als das zweier Spiegelungen. Um den Zusammenhang der beiden resultierenden Drehungen zu finden, denken wir uns den Schnittpunkt der zwei Geraden, die bei der Drehung in sich verschoben werden und die die Projektionen der größten Kreise darstellen, die in sich gedreht werden, in den Punkt N gelegt. (Vgl. Fig. 8). Die zugehörigen Rotationsachsen fallen dann in die Zeichenebene, und die Ebenen der beiden größten Kreise stehen senkrecht zur Zeichenebene. Die Pole der Geraden liegen auf dem Einheitskreise, und äquivalente Drehstrecken haben, von N aus nach beiden Seiten abgetragen, die gleiche Länge. Die resultierenden Drehgeraden verlaufen daher in gleichem Abstande beiderseits von N parallel, und die resultierenden Drehstrecken sind gleich lang. Daraus erkennt man nach Konstruktion der Pole der resultierenden Rotationsachsen, daß bei vertauschter Reihenfolge die Achsen der resultierenden Drehungen zwar verschieden, aber die Rotationswinkel gleich sind. Die beiden resultierenden Achsen liegen mit der Schnittgeraden der beiden größten Kreise in einer Ebene, die senkrecht zur Ebene der zwei gegebenen Rotationsachsen steht, und bilden gleiche Winkel mit ihr.

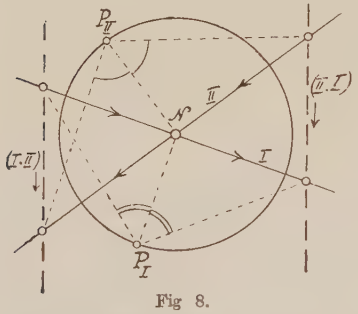


Fig 8.

§ 4. Die Umklappung.

Bevor wir nun zur Komposition von Spiegelungen in ungerader Anzahl übergehen, wollen wir den speziellen Fall einer Drehung um 180°, die wir als „Umklappung" bezeichnen, ins Auge fassen, der späterhin von Bedeutung werden wird. Die Operation der Umklappung ist durch die Achse des größten Kreises, der in sich gedreht wird, schon festgelegt, läßt sich also graphisch analog wie die Spiegelung durch einen einzigen Punkt, den Durchstoßpunkt der Umklappungsachse durch die Projektionsebene, eindeutig darstellen.

Es seien nun zwei „Umklappungspunkte" U_1 und U_2 gegeben, und zwar mögen sie in der Projektion auf einer durch das Zentrum des Einheitskreises laufenden Geraden liegen, was für die gegenseitige Lage der U-Punkte keine Beschränkung ist. (Vgl. Fig. 9). Konstruiert man die zu U_1

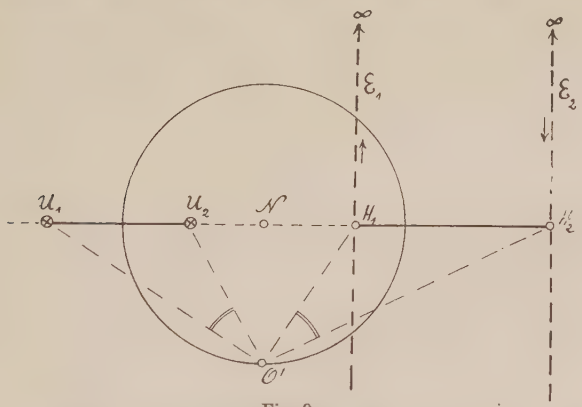


Fig. 9.

und U_2 gehörigen Rotationsgeraden E_1 und E_2, so sind diese parallel, ihr Schnittpunkt liegt also im Unendlichen. Legt man zwecks Komposition der beiden Drehungen U_1 und U_2 den Endpunkt der Drehung U_1 und den Anfangspunkt der Drehung U_2 nach Unendlich, so fällt der Anfangspunkt von U_1 und ebenso der Endpunkt von U_2, da die Umklappungsstrecken von ihren Polen aus unter 90°

erscheinen müssen, in die Senkrechte zu E_1 und E_2 durch N, auf der auch U_1 und U_2 liegen. Die Strecke $H_1 H_2$ gibt die resultierende Drehstrecke an, und diese ist nach Konstruktion äquivalent der Strecke $U_1 U_2$, d. h. gleich der Verbindungsgeraden der beiden U-Punkte. Umklappungen lassen sich also genau so wie Spiegelungen komponieren. Da der Durchstoßpunkt der zugehörigen Rotationsachse, wie man an der Figur ersieht, mit dem Schnittpunkt der beiden Spuren E_1 und E_2 im Unendlichen zusammenfällt, so sind zwei Umklappungen in der Tat äquivalent einer Drehung um den doppelten Winkel der beiden U-Achsen um diejenige Achse, die senkrecht zur Ebene der U-Achsen steht.

Offensichtlich ist hier auch die Rotation $U_2 \cdot U_1$ weder der Achse noch dem Winkel, sondern nur der Drehungsrichtung nach von $U_1 \cdot U_2$ verschieden, sodaß hier ebenso wie für Spiegelungen die Gleichung gilt

$$U_2 \cdot U_1 = (U_1 \cdot U_2)^{-1}.$$

Für die einzelne Umklappung ist übrigens die Drehungsrichtung gleichgültig, d. h.

$$U^{-1} = U^1;$$

und schließlich ist auch

$$U^2 = 1$$

in Übereinstimmung mit der vorigen Gleichung. Aus alledem folgt, daß die durch zwei U-Punkte dargestellte Drehung dieselbe bleibt, wenn wir die U-Punkte U_1, U_2 durch zwei Spiegelpunkte S_1, S_2 ersetzen, was auch umgekehrt gilt.

§ 5. Die Inversion.

Umklappungen als spezielle Rotationen lassen sich mit Umklappungen und Drehungen ohne Weiteres beliebig komponieren. Um die Frage ihrer Zusammensetzung mit einer Spiegelung zu klären, nehmen wir zuerst den besonderen Fall an, daß ein U-Punkt und ein S-Punkt aufeinanderfallen; das bedeutet, daß eine bestimmte Ebene

zuerst um 180^0 in sich gedreht und dann an ihr eine Spiegelung ausgeführt wird oder umgekehrt. Welche Raumtransformation sich daraus ergibt, läßt sich schon an einer senkrechten Parallelprojektion der Kugel übersehen (vgl. Fig. 10), wenn man den Weg P, P′, P″ eines ganz beliebigen Punktes P der Kugeloberfläche verfolgt: P″ liegt dem Punkt P diametral gegenüber, und so wird jeder Punkt der Kugel im Raume in seinen diametralen übergeführt.

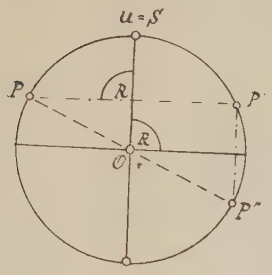


Fig. 10.

Eine solche Umformung kann, wie sich an zwei diametralen Dreiecken unschwer einsehen läßt, weder durch eine Spiegelung allein noch durch eine Drehung allein bewirkt werden und wird als „Inversion“ bezeichnet. Man könnte sie als Spiegelung an einem Punkte, dem Kugelmittelpunkt, auffassen; analog wäre dann eine Umklappung die Spiegelung an einer Achse.

Graphisch würde infolge der Inversion jeder Punkt der oberen Seite der Projektionsebene durch den genau darunterliegenden der unteren Seite zu ersetzen sein und umgekehrt.

Setzen wir

$$U \cdot S = J,$$

so gilt auch

$$S \cdot U = J$$

und ebenso wie für Spiegelungen und Umklappungen

$$J^1 = J^{-1}$$

und

$$J^2 = 1.$$

Wie nun eine Rotation nur abhängig ist von einem Spiegelebenenpaare, das sich frei um eine Achse bewegen darf, so ist die Inversion nur abhängig von dem fest verbundenen System einer U-Achse und einer dazu senkrechten S-Ebene, das im übrigen völlig frei um das Zen-

trum der Inversion beweglich bleibt. Graphisch wäre also die Inversion durch das Zusammenfallen eines einzigen beliebigen U-Punktes mit einem S-Punkte eindeutig gekennzeichnet.

§ 6. Die Drehspiegelung.

(Ungerade Anzahl von Spiegelungen.)

Infolge der eben genannten Eigenschaft der Inversion ist es nun auch möglich, die Frage nach der allgemeinsten Raumumformung, die durch eine ungerade Anzahl beliebiger Spiegelungen bewirkt wird, in einfacher Weise zu beantworten.

Bemerken wir im voraus, daß, wie an der Figur 10 unmittelbar ersichtlich, unter der speziellen Voraussetzung des Zusammenfallens von U mit S sowohl eine Umklappung durch eine Inversion mit nachfolgender Spiegelung wie eine Spiegelung durch eine Inversion nebst einer Umklappung in beliebiger Reihenfolge ersetzbar ist, also die Gleichungen

$$(1) \qquad U_1 = J \cdot S_1 = S_1 \cdot J$$

und

$$(2) \qquad S_1 = J \cdot U_1 = U_1 \cdot J$$

gelten, und seien nun drei beliebige zu komponierende Spiegelungen S_1, S_2, S_3 gegeben, so schreiben wir:

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = D_{12} \cdot U_3 \cdot J,$$

wo D_{12} die die beiden Spiegelungen S_1 und S_2 ersetzende Drehung ist. Die zwei Drehungen D_{12} und U_3 lassen sich zu einer einzigen Drehung zusammenfassen, die hier einmal mit D_m bezeichnet werden möge, weil sie eine Rotation um eine gewisse Achse darstellt, deren Projektion der Punkt m sei; also

$$(3) \qquad S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = R_m \cdot J.$$

Drei beliebige Spiegelungen sind also stets ersetzbar durch ein Produkt aus einer Drehung und einer Inversion.

Weiter kann J ersetzt werden durch eine Umklappung

um die Achse der Rotation R_m und eine Spiegelung an der Ebene senkrecht zu dieser Achse:

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = R_m \cdot U_m \cdot S_m.$$

Ist α der Drehungswinkel von R_m, so ist die Drehung $R_m \cdot U_m$ gleich einer einzigen Drehung um die Achse m um den Winkel $\alpha + \pi$; wir setzen daher

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = R'_m \cdot S_m .$$

Drei beliebige Spiegelungen lassen sich also stets zu einer Drehung um eine bestimmte Achse und einen bestimmten Winkel, verbunden mit einer Spiegelung an der zu der Achse senkrechten Ebene zusammensetzen. Eine solche Raumtransformation wird „Drehspiegelung", die zugehörige Rotationsachse „Drehspiegelachse" oder kurz „Spiegelachse" genannt. Die Reihenfolge der Teiloperationen ist, wie ersichtlich, beliebig.

Graphisch wäre das Aequivalent dreier Spiegelpunkte also eine genau konstruierbare Drehstrecke samt ihrem „Gegenpol" S_m als Spiegelpunkt. [Da S_m durch die Drehstrecke bestimmt ist, kann man S_m auch weglassen und die Drehspiegelung graphisch etwa durch die doppelt ausgezogene Drehstrecke repräsentieren.]

Das Quadrat einer Drehspiegelung ergibt übrigens wieder eine Rotation:
$(R'_m \cdot S_m)^2 = R'_m \cdot S_m \cdot R'_m \cdot S_m = R'_m \cdot R'_m \cdot S_m \cdot S_m = R'^2_m$,
da $S_m{}^2 = 1$ ist, also eine Rotation um dieselbe Achse aber um den doppelten Rotationswinkel.

Man kann drei beliebige Spiegelungen noch in anderer Weise auf spezielle Operationen zurückführen: Ersetzt man in Gleichung (3) die Drehung R_m durch die zwei zugehörigen Umklappungen U_p, U_q:

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = U_p \cdot U_q \cdot J$$

und darauf nach Gleichung (2) $U_q \cdot J$ durch die Spiegelung S_q, so ist

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = U_p \cdot S_q.$$

Drei Spiegelungen sind also auch äquivalent dem Produkt aus einer Umklappung und einer Spiegelung, aber mit verschiedener Achse. Graphisch stellt sich dem-

nach eine Drehspiegelung auch als Verbindung eines U-Punktes p mit einem S-Punkte q dar, wobei die Strecke pq die zugehörige Drehung darstellt.

Drei Spiegelungen haben als Resultat eine Drehspiegelung ergeben, die im besonderen Falle auch eine Inversion oder eine reine Spiegelung sein kann, wenn der Rotationswinkel gleich 180 O^0 wird. Mehr Spiegelungen in ungerader Zahl ergeben ebenfalls eine Drehspiegelung, denn indem man die Spiegelungen paarweise zu Rotationen zusammenfaßt und diese zu einer einzigen Rotation komponiert, erhält man als Resultat ein Produkt aus einer einzigen Drehung und der übrigbleibenden Spiegelung, was wieder, wenn man sich die resultierende Drehung in zwei Spiegelungen zerlegt denkt, mit drei Spiegelungen äquivalent ist.

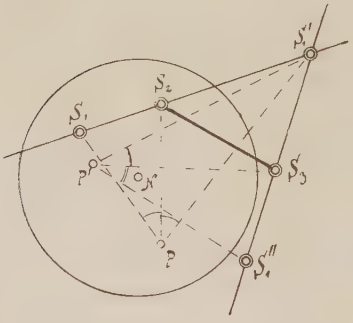


Fig. 11.

Hier sei nun auch eingefügt, in welchem Punkt ein gegebener Spiegelpunkt S_1 durch eine gegebene Rotation $D_{23} = S_2 \cdot S_3$ graphisch übergeführt wird, indem man die Drehung D_{23} in die 2 Spiegelungen S_2 und S_3 graphisch auflöst (vgl. Figur 11).

Zusammenfassend läßt sich also sagen:

Eine **gerade** Anzahl von Spiegelungen läßt sich stets auf zwei Spiegelungen, also **eine Drehung,** eine **ungerade** Anzahl immer auf drei Spiegelungen, also **eine Drehspiegelung** zurückführen.

B. Die stereographische Methode; ihre Äquivalenz mit der gnomonischen Darstellung.

Im Vorstehenden haben wir gesehen, wie man Spiegelungen und Umklappungen in gnomonischer Projektion darstellen und mit den graphischen Zeichen gesetzmäßig operieren kann, und wie jeder graphischen Zusammensetzung von Operationen eine ganz bestimmte Raumtransformation eindeutig entspricht. Wir hatten dabei aber bemerkt, daß die graphische Darstellung der Drehung $S_1 \cdot S_2$ nicht unmittelbar angab, in welchen Punkt irgend ein beliebiger Punkt infolge der Drehung übergeführt wird. Da zeigt sich nun, daß bei anderer Auffassung der Projektion durch eine Drehstrecke $S_1 S_2$ nicht nur die Operation einer bestimmten Rotation eindeutig bestimmt ist, sondern auch wirklich der dem Anfangspunkt S_1 der Rotation entsprechende Punkt der

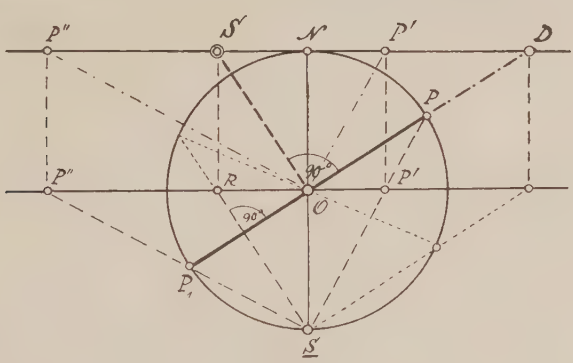


Fig. 12.

Kugeloberfläche durch die Rotation in den Endpunkt S_2 der Strecke übergeführt wird, wenn man nämlich die Projektion nicht mehr als gnomonische, sondern als stereographische mit dem nämlichen Fundamentalkreis auffaßt, bei der die stereographische Projektionsebene parallel der gnomonischen Ebene durch das Kugelzentrum geht, also in der Äquatorialebene liegt,

und das Projektionszentrum im Südpol, also dem Berührungspunkt der gnomonischen Ebene diametral gegenüber angenommen wird (vgl. Fig. 12).

In der stereographischen Projektion wählt man nach Runge für die eindeutige Darstellung einer Rotationsachse denjenigen auf ihr senkrecht stehenden, bei der Rotation also in sich übergehenden Kreis, der durch das Projektionszentrum S läuft und daher in eine Gerade ausgeartet ist. Diese Gerade fällt, wie an Fig. 12 unmittelbar ersichtlich, wenn man sich nach erfolgter Projektion die gnomonische mit der stereographischen Projektionsebene zur Deckung gebracht denkt, mit der Projektion desjenigen größten Kreises in gnomonischer Projektion zusammen, der dieselbe Rotationsachse darstellt.

In der gnomonischen Projektion bestimmten wir den „Pol" P′, von dem aus der zu zwei Spiegelpunkten gehörende halbe Rotationswinkel gemessen wurde (vgl. Fig. 5, S. 14). In der stereographischen Projektion ist dieser Punkt die Projektion des Endpunktes P der gegebenen Rotationsachse, da wegen der Gleichheit des Winkels RP′S mit Winkel RSP die Entfernung RP′ gleich RS ist.

Der zu P′ diametrale Punkt P″ liegt im Schnittpunkt der Verlängerung von P′N mit dem Kreise um R als Mittelpunkt, der durch S′ und P′ geht. (Vgl. Fig. 13.)

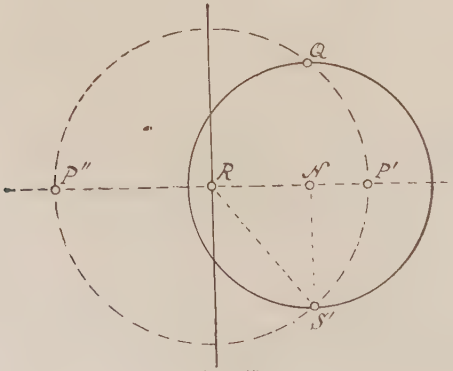


Fig. 13.

Denn P″ liegt dann erstens mit P′ und N auf einer Achse und zweitens mit P′ zugleich auf einem größten Kreise, da der Kreis S′ P′ QP″ durch zwei diametrale Punkte S′ und Q des Aequators läuft, also ein größter Kreis ist. Irgend eine Rotationsgerade in stereographischer Projektion ist demnach die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke ihrer beiden Pole P′ und P″.

Bei der Ausführung einer bestimmten Rotation um die Achse P′ P″ (vgl. Fig. 14) geht nun irgend ein größter

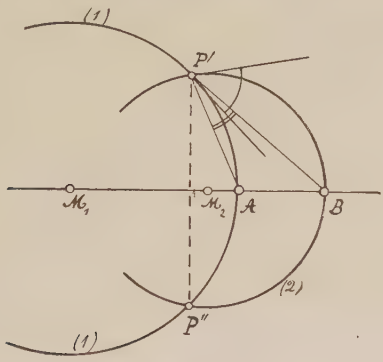


Fig. 14.

Kreis (1) durch P′ P″ in einen bestimmten anderen größten Kreis (2) über, wobei also auf der Rotationsgeraden der Punkt A nach B gelangt. Der Winkel der Ebenen der beiden größten Kreise, also der Rotationswinkel, der wegen der Winkeltreue der stereographischen Abbildung in der Projektion in seiner wahren Größe erhalten bleibt, ist in der Projektionsebene gleich dem Winkel der beiden Kreistangenten. Dieser ist aber, wie mit Benutzung des Satzes vom Peripheriewinkel leicht zu beweisen, doppelt so groß wie der Winkel AP′B. Somit erscheint also die Strecke, um die bei einer Rotation irgend ein Punkt einer Rotationsgeraden auf dieser weiter

wandert, von ihrem Pol aus gesehen stets unter dem halben Rotationswinkel.

Damit ist der enge Zusammenhang der stereographischen mit der gnomonischen Darstellungsweise von Drehungen erwiesen. (Vgl. A, § 3). Wir dürfen uns die Grenzpunkte einer stereographischen Drehstrecke einfach durch zwei gnomonische Spiegel- oder auch Umklappungspunkte ersetzt denken und umgekehrt; beides charakterisiert die nämliche Drehung, jedoch nur bei stereographischer, nicht bei gnomonischer Auffassung geht dabei der eine Punkt in den anderen über.

II. Kapitel.

Die Herleitung der Gruppen.

Im Vorstehenden sind nun alle Hilfsmittel gewonnen, die zum Aufbau aller endlichen Gruppen, die durch Spiegelungen und Drehungen hervorgebracht werden können, führen werden.[1])

Die Spiegelungen für sich genommen bilden eigentlich keine Gruppe, denn sie führen zu Rotationen und Drehspiegelungen; dagegen bilden die Rotationen eine in sich abgeschlossene Gruppe. Es ist daher gewöhnlich der Weg eingeschlagen worden, zuerst die Rotationsgruppen zu finden und diesen hinterher die Spiegelungen einzufügen; die so entstehenden neuen Gruppen sind dann als „erweiterte Gruppen" oder als „Gruppen zweiter Art" bezeichnet worden. Wir wollen dagegen von Spiegelungen ausgehen und zuerst die allgemeineren „Spiegelungsgruppen" in gnomonischer Projektion ausfindig machen; aus ihnen werden sich dann die „reinen Rotationsgruppen" als spezielle, „ausgezeichnete Untergruppen" ergeben, indem wir die Spiegelungen durch Umklappungen ersetzen oder die gefundenen Gruppenbilder stereographisch deuten. Daß dadurch wirklich alle überhaupt möglichen reinen Drehungsgruppen mitgewonnen werden, ergibt sich an-

---

[1]) Über den Begriff der „Gruppe" und die einfachsten abgeleiteten Begriffe, die hier nur in Betracht kommen, vgl. man etwa den ersten Abschnitt in F. Kleins „Vorlesungen über das Ikosaeder".

schaulich aus der Identität der gnomonischen und der stereographischen Konstruktion der „Gruppenbilder“[1])

A. Die elementaren Gruppen.

§ 1. Identität, Spiegelung, Umklappung, Inversion.

Betrachten wir zuerst die Gruppen, die nur eine einzige der aus Spiegelungen hervorgehenden „Deckoperationen“ enthalten, weil ihr Quadrat schon die „Identität“ ergibt, so sind, wenn wir die Identität als besondere Gruppe mitzählen, nach Früherem zu nennen die Gruppen

1) der Identität,
2) der Spiegelung,
3) der Umklappung,
4) der Inversion.

Der Gruppe der Identität entspricht ein Körper von völliger Unsymmetrie. Einer Gruppe, die nur die Spiegelung enthält, entspricht ein Körper mit einer einzigen Symmetrieebene. Die Gruppe der Umklappung besitzt als entsprechendes Symmetrieelement eine Umklappungsachse; das Symmetrieelement der Inversion ist ein Symmetriezentrum.

Um eine Vorstellung von einem Körper zu erhalten, der durch die Deckoperationen einer gegebenen Gruppe in sich übergeführt wird, der also alle entsprechenden Symmetrieelemente der Gruppe enthält, bestimmt man am besten einen sogenannten „Fundamentalbereich“, d. h. einen solchen Raumteil, der durch die Operationen der Gruppe vervielfältigt, genau einmal den ganzen Raum ausfüllt. Dieser umschließt den gemeinsamen Schnittpunkt aller Symmetrieelemente und kann als durch eine endliche Oberfläche begrenzt angenommen werden. Die

[1]) Die folgenden Abschnitte A und B dieses Kapitels sind möglichst kurz gehalten, weil weniger Neues bietend. Der Hauptabschnitt C dürfte für sich allein verständlich sein.

Berandung des Fundamentalbereichs ist durch die zugehörige Gruppe festgelegt. Innerhalb des Ausgangs-Fundamentalbereichs dagegen darf die äußere Oberfläche völlig beliebig angenommen werden. Denken wir uns die Oberfläche eines Fundamentalbereichs speziell als Ebene, so werden die symmetrischen Körper in besonderen Fällen zu Kristallformen; dabei ergibt sich allerdings nicht immer ein im Endlichen geschlossener Körper.

Um sich die Gesamtheit der Fundamentalbereiche einer Gruppe zu verdeutlichen, denkt man sich die Oberfläche des symmetrischen Körpers vom gemeinsamen Schnittpunkt seiner Symmetrieelemente aus auf die Oberfläche der Einheitskugel projiziert, sodaß sich die Fundamentalbereiche durch irgendwie begrenzte Oberflächenstücke der Kugel darstellen. Eine solche Einteilung der Kugeloberfläche in lauter Fundamentalbereiche wird als „Kugelteilung“ bezeichnet. Man kann also die Symmetrie eines einer Gruppe entsprechenden Körpers einfach durch die zugehörige Kugelteilung und zwar zweckmäßig in ihrer stereographischen Projektion charakterisieren.

§ 2. Eine Rotationsachse: „Cyklische“ Gruppen.

Ist es einleuchtend, daß den vier zuletzt genannten Gruppen, nämlich denen der Identität, der Spiegelung, der Umklappung und der Inversion, Körper von bestimmter, endlicher Symmetrie und bestimmter Kugelteilung entsprechen, so ist das dagegen bei einer beliebigen Rotation und einer beliebigen Drehspiegelung nicht mehr in demselben Maße der Fall.

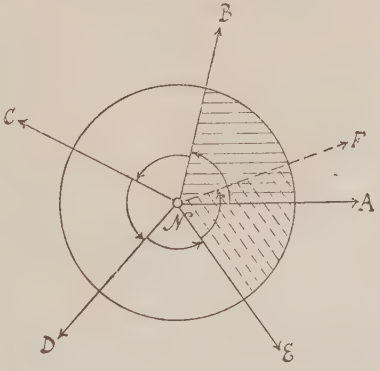


Fig. 15.

Denken wir uns eine Rotation von beliebigem Winkel graphisch gegeben, wobei wir uns die Rotationsachse in die Erdachse ge-

legt, also vertikal denken (vgl. Fig. 15) so wandert ein beliebiger Punkt A auf einem Kreise um N nach B, dieser nach C. Soll durch diese Rotation nicht eine bloße Bewegung des ganzen Raumes, sondern eine „Deckoperation" gemeint sein, d. h. soll mit ihr eine Überführung irgend eines Raumstückes in ein entsprechendes Raumstück, das jenem gleichwertig ist, also irgend eine Symmetrie eines zugehörigen Körpers ausgedrückt sein, so muß Punkt B mit Punkt A als gleichwertig angesehen werden; damit muß aber auch C äquivalent B, folglich auch äquivalent A sein u. s. f. Die äquivalenten Punkte entstehen also alle durch Wiederholung der Drehung um den Rotationswinkel α. Wir sehen also, wie mit einer Drehung, wenn sie eine „Deckoperation" sein soll, stets alle Wiederholungen mitgegeben, d. h. in der Gruppe enthalten sind. Die Rotationsachse wird so zur „Symmetrieachse".

Die Wiederholungen einer Drehung um eine Achse führen aber nur dann einmal zum Ausgangspunkt der ersten Drehung zurück, es sind also nur dann endlich viele äquivalente Punkte vorhanden, wenn der Rotationswinkel ein rationaler Teil des Winkels 2π ist, also $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$, wo m zu n teilerfremd vorausgesetzt werden darf. Ist $m > 1$, so führen die Wiederholungen der Drehung notwendig schon bei Beginn der zweiten Umdrehung zu einem zwischen A und B gelegenen, mit A und B äquivalenten Punkte; das ergäbe einen neuen, kleineren Rotationswinkel, der ein rationaler Teil von 2π ist. So fortfahrend kommt man zu dem Schluß, daß der Ausgangswinkel α' als $\frac{1}{n} 2\pi$ angenommen werden darf. Dann ist die n^{te} Potenz der Umdrehung gleich der Identität und jede höhere Potenz unter der endlichen Reihe der n ersten Umdrehungen enthalten; es gibt also genau n äquivalente Punkte, die eine in sich abgeschlossene Gruppe bilden. Eine solche Gruppe bezeichnet man als „zyklische"

Gruppe vom Grade n; die zugehörige Rotationsachse heißt „n-zählig".

Was die zu einer zyklischen Gruppe gehörige Kugelteilung betrifft, so erkennen wir, daß jedes Kugelzweieck vom Winkel $\frac{2\pi}{n}$, dessen Ecken mit den Polen der Rotationsachse zusammenfallen, einen Fundamentalbereich der Gruppe darstellt; jedoch ist zu beachten, daß die Grenzkurven beliebige Aus- und Einbuchtungen haben dürfen bezw. haben müssen, nur muß jeder Ausbuchtung des einen begrenzenden Meridians — wir denken uns die Rotationsachse in die Erdachse gelegt — eine Einbuchtung des andern entsprechen; ferner ist zu beachten, daß der über dem Kugelzweieck zu konstruierende Körper keine Symmetrie in bezug auf die Aequatorebene besitzen darf. Die Enden der Symmetrieachse des Körpers sind also verschieden ausgebildet; eine solche Symmetrieachse nennt man eine „polare" Achse. Wird der Rotationswinkel unendlich klein oder ein irrationaler Teil von 2π, sodaß sich unendlich viele äquivalente Punkte ergeben, so erhalten wir als Fundamentalbereich ein unendlich schmales Kugelzweieck, und der zugehörige symmetrische Körper ist ein beliebiger Rotationskörper, speziell ein Zylinder oder Kegel. Doch wollen wir, wie schon bemerkt, unendliche Gruppen von der Betrachtung ausschließen.

§ 3. Eine Spiegelachse.

Für die durch eine Spiegelachse charakterisierte Gruppe einer beliebigen Drehspiegelung gilt von dem zugehörigen Rotationswinkel ebenso wie bei einer Rotationsachse, daß bei irrationalem Verhältnis von α zu 2π eine unendliche Gruppe erzeugt wird und daß, wenn die Gruppe endlich ist, der Rotationswinkel jedenfalls gleich $\frac{1}{n} \cdot 2\pi$ sein muß; jedoch dürfen wir nur solche Gruppen als Drehspiegelungsgruppen bezeichnen, bei denen n eine

gerade Zahl ist. Denn bei einer Drehspiegelungsgruppe entspricht in der zugehörigen Kugelteilung der oberen Hälfte eines Fundamentalzweiecks vom Winkel $\frac{2\pi}{n}$ die untere Hälfte des benachbarten Kugelzweiecks. (Vgl. Fig. 16.) Wäre die Anzhl der Kugelzweiecke ungerade, so würde nach einer vollen Umdrehung die obere Hälfte des letzten Kugelzweiecks, die ja mit der oberen Hälfte des ersten äquivalent ist, in die untere Hälfte des ersten Kugelzweiecks übergeführt werden. Die Folge wäre also eine neu hinzutretende Symmetrieebene in der Äquatorebene und die Spiegelachse selbst würde zu einer Rotationsachse von derselben Zähligkeit. Die Spiegelachse zerfiele demnach in zwei einfachere Symmetrieelemente, wäre also keine eigentliche Spiegelachse mehr.

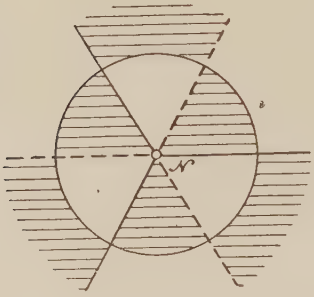


Fig. 16.

Fassen wir zwei benachbarte Kugelzweiecke einer Drehspiegelungsgruppe als ein einziges auf, so erkennen wir, daß in jeder Drehspiegelungsgruppe eine zyklische Gruppe von halb so hoher Zähligkeit enthalten ist.

Bei den Drehspiegelachsen haben wir noch ein Zweites zu beachten. Jede solche Achse ist, wie erwähnt, zugleich eine Rotationsachse von halber Zähligkeit. Ist diese wiederum geradzählig, also zugleich als Umklappungsachse aufgefaßt werden kann, so liegen an der Spiegelachse zwei Scheitelzweiecke in derselben Stellung einander gegenüber (vgl. Fig. 17); im andern Falle dagegen stoßen sie in umgekehrter Lage aneinander (vgl. Fig. 16), sind

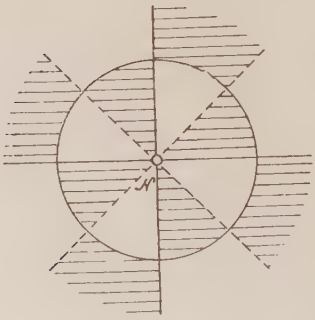


Fig. 17.

also durch eine Umklappung verbunden mit einer Spiegelung an der dazu senkrechten Ebene ineinander überführbar. Das Produkt dieser beiden Operationen ist aber einer Inversion äquivalent; also enthält eine Drehspiegelungsgruppe, deren Zähligkeit eine durch 4 teilbare Zahl ist, stets zugleich die Inversionsgruppe in sich.

Fassen wir die bisher gefundenen Gruppen zusammen, so haben wir außer den vier einfachen Grundtypen noch zwei unendliche Reihen von Gruppen erhalten: Die cyklischen Gruppen und die Drehspiegelungsgruppen. Ist der Grad n einer zyklischen Gruppe keine Primzahl, so enthält die Gruppe offensichtlich alle Gruppen vom Grade der einzelnen Faktoren von n als Untergruppen in sich. Die Drehspiegelungsgruppen existieren nur für 2n-zählige Spiegelachsen; sie enthalten stets eine zyklische Gruppe vom Grade n in sich, die ihrerseits wieder in Untergruppen zerlegbar sein kann und speziell im Falle $n' = 4n$ die Umklappungsgruppe, im Falle $n'' = 2(n + 1)$ die Inversionsgruppe in sich enthält.

Für die Kristallographie kommen von diesen Gruppen, weil hier wegen des „Grundgesetzes der rationalen Achsenschnitte“ außer Symmetrieebenen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige, nicht aber 5- und höherzählige Symmetrieachsen auftreten können, nur folgende 9 Gruppen in Betracht:

1) Die asymmetrische Gruppe,
2) „ einfache Umklappungsgruppe [Zyklische Gruppe vom Grade 2],
3) „ zyklische Gruppe vom Grade 3,
4) „ „ „ „ „ 4,
5) „ „ „ „ „ 6,
6) „ einfache Spiegelungsgruppe,
7) „ Inversionsgruppe [Drehspiegelungsgruppe vom Grade 2],
8) „ Drehspiegelungspruppe vom Grade 4,
9) „ „ „ „ 6.

B. Gruppen mit einer höherzähligen Achse.

§ 4. Zwei Spiegelebenen: Zyklische Gruppen mit vertikaler Symmetrie-Ebene.

Gehen wir nun zur Bildung der Gruppen über, die durch Kombination von je zweien der Grundtypen von Deckoperationen entstehen. Dabei kommt die Inversion für sich als neue Gruppen bildend nicht in Frage, da zwei Inversionen stets gleich der Identität sind. Wir fassen zuerst zwei Spiegelungen und dann zwei Umklappungen ins Auge.

Es ist uns schon bekannt, daß zwei Spiegelungen einer Rotation um die Schnittgerade der Spiegelebenen um den doppelten Winkel dieser Ebenen äquivalent sind. Ordnen wir die durch zwei Spiegelungen entstehenden Gruppen nach der Zähligkeit der mitbestimmten Rotationsachse, so folgt sofort, daß der Winkel der beiden Symmetrieebenen $\alpha = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ sein muß, wenn die Achse n-zählig ist. Ist nun n ungerade, (vgl. Fig. 18) so folgen aus den zwei Symmetrieebenen durch die Drehung sowohl wie durch ihre eigene Spiegelung genau n Spiegelebenen, die alle ineinander übergehen, wobei allerdings immer nur die entsprechenden Halbebenen miteinander zur Deckung kommen.

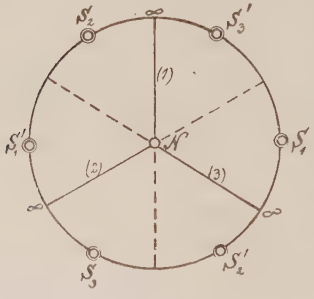


Fig. 18.

Ist dagegen n eine gerade Zahl, so kommt bei der in der Rotation enthaltenen Umklappung jede vorhandene Symmetriehalbebene mit ihrer gegenüberliegenden Halbebene zur Deckung; aber es gehen aus Ebene (1) und aus Ebene (2) (vgl. Fig. 19) zwei verschiedene Reihen von Symmetrieebenen hervor, deren einzelne Ebenen mit jeder Ebene der nämlichen Reihe,

aber niemals mit einer Ebene der anderen Reihe zur Deckung kommen. Umgekehrt haben, wie hier gleich bemerkt sein möge, weil es späterhin von Bedeutung werden wird, z. B. zwei zu einander senkrechte, gleichwertige, vertikale Symmetrie-Ebenen außer der durch ihre Schnittlinie gehenden vierzähligen Rotationsachse noch zwei andere, die Winkel des gegebenen Ebenenpaares halbierende Symmetrie-Ebenen zur Folge, wie Figur 20 veranschaulichen soll. Das gilt für jede geradzählige Achse mit entsprechendem Spiegelebenenpaar.

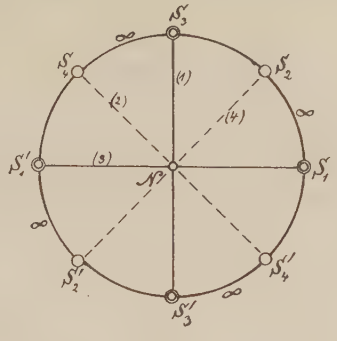


Fig. 19.

Die Gruppen mögen zyklische „mit vertikaler Symmetrieebene" genannt werden, da wir uns zweckmäßig die Rotationsachse vertikal vorgestellt haben.

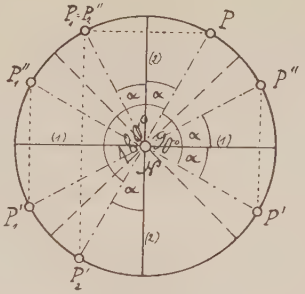


Fig. 20.

Die diesen Gruppen entsprechenden Fundamentalbereiche sind Kugelzweiecke, die von zwei benachbarten, nicht zur Deckung gelangenden Spiegelhalbebenen begrenzt sind und keine Symmetrie inbezug auf die Äquatorebene besitzen. Bei n-zähliger Rotationsachse gibt es 2n solcher Zweiecke, wobei zwei benachbarte Bereiche einander spiegelbildlich gleich sind.

§ 5. Zwei Umklappungsachsen: „Diedergruppen."

Genau wie durch zwei Spiegelungen wird durch zwei Umklappungen eine Rotationsachse mitbestimmt. Die Ver-

hältnisse lassen sich wegen der früher bemerkten Übereinstimmung der Zusammensetzung von Umklappungen mit der von Spiegelungen an den Figuren 18 und 19 sofort ablesen, wenn man die dort gezeichneten Spuren der Spiegelebenen als Umklappungsachsen auffaßt. So sind die zwei Enden der Umklappungsachsen bei ungeradem n verschiedenwertig, also „polar", bei geradem n nicht. Auch der der Figur 20 analoge Satz bleibt bestehen. Nur sind hier die beiden Richtungen der vertikalen Rotationsachse gleichwertig, weil durch jede der Umklappungen ihre beiden Enden vertauscht werden.

Die entsprechenden Gruppen werden als „Diedergruppen" bezeichnet, weil man sich ihre Operationen an einem als doppelseitig aufgefaßten, regelmäßigen n-Eck mit seinen Diagonalen, einem sogenannten „Dieder", verdeutlichen kann. Die vertikale Rotationsachse soll hier und im Folgenden als „Hauptachse" bezeichnet werden.

Der Fundamentalbereich der zu diesen Gruppen gehörenden Kugelteilung ist entsprechend wie der im Falle zweier Spiegelungen; jedoch werden hier die Fundamentalzweiecke an den Seiten nicht durch ebene Kurven begrenzt. Zwei benachbarte Bereiche gehen durch Umklappung in einander über.

Unter den Diedergruppen ist besonders bemerkenswert die für $n = 2$, die also aus drei zueinander senkrechten, verschiedenwertigen, aber nicht polaren Achsen besteht. Bei dieser Gruppe sind bemerkenswerterweise sämtliche Zusammenordnungen von Operationen in ihrer Reihenfolge vertauschbar. Sie enthält mit der Identität zusammen nur vier Operationen und wird daher als die „Vierergruppe" bezeichnet.

Für die Kristallographie sind unter den zwei eben gefundenen Reihen von Gruppen folgende von Bedeutung:

Zyklische Gruppen mit vertikaler Symmetrieebene:

10) vom Grade 2 [Symmetrie-Ebenen: 1 + 1]
11) „ „ 3 [„ „ : 3 + 0]
12) „ „ 4 [„ „ : 2 + 2]
13) „ „ 6 [„ „ : 3 + 3]

Diedergruppen:

14) vom Grade 2 [Umklappungs-Achsen: 1 + 1]
15) „ „ 3 [„ „ : 3 + 0]
16) „ „ 4 [„ „ : 2 + 2]
17) „ „ 6 [„ „ : 3 + 3] [1])

§ 6. Zyklische Gruppen mit horizontaler Symmetrieebene.

Bei der weiteren Herleitung der Gruppen wollen wir erst alle diejenigen Gruppen, die eine einzige ausgezeichnete Achse, eine Hauptachse, besitzen, vorwegnehmen und diejenigen Gruppen, die zwei und mehr Achsen von höherer Zähligkeit als 2 enthalten, bis zuletzt zurückstellen.

Soll also die Hauptachse als solche erhalten bleiben, so dürfen mit ihr vorläufig nur Spiegelebenen kombiniert werden, die entweder durch die Hauptachse gehen oder zu ihr senkrecht stehen, und nur solche U-Achsen, die zu ihr normal sind. Denn jede andere Lage einer Symmetrieebene oder U-Achse würde jedenfalls eine Verdoppelung der Hauptachse durch Spiegelung oder Umklappung zur Folge haben.

Außer den schon betrachteten zyklischen Gruppen mit durch die Hauptachse gehenden S-Ebenen existiert somit

---

[1]) Die Konstruktion der graphischen Bilder jeder einzelnen der bisher aufgezählten und der zunächst folgenden Gruppen ist wegen ihrer Einfachheit wohl ohne Schaden für die Entwicklung nicht ausgeführt worden. Erst die Gruppen mit zwei höherzähligen Achsen (Abschnitt C, §§ 8—11) bieten im Aufbau ihrer Gruppenbilder wesentlich neue Gesichtspunkte und werden dort einzeln konstruiert.

eine unendliche Reihe von zyklischen Gruppen mit horizontaler Symmetrieebene. Zu den n Rotationen um die Hauptachse treten die Spiegelungen an der Aequatorebene hinzu. Der Fundamentalbereich besteht hier nur aus der oberen Hälfte des früher aufgetretenen Kugelzweiecks. Bei geradzähliger Hauptachse enthält eine solche Gruppe die Inversion, denn sie enthält die Umklappung zugleich mit der Spiegelung an der zur Umklappungsachse senkrechten Ebene.

Aus der unendlichen Reihe heben sich vier kristallographische Gruppen von zyklischem Typus mit horizontaler Symmetrieebene heraus:

18) vom Grade 2 [mit Symmetrie-Zentrum]
19) „ „ 3 [ohne „ „]
20] „ „ 4 [mit „ „]
21) „ „ 6 [mit „ „]

Damit sind nun die Gruppen von zyklischem Typus, d. h. diejenigen mit einer einzigen Rotationsachse, erschöpft.

§ 7. Diedergruppen mit vertikaler Symmetrie-Ebene.

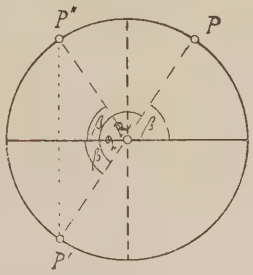
Wir wenden uns also zu den Gruppen von diedrischem Typus. Mit ihnen wollen wir zuerst vertikale und dann horizontale Symmetrie-Ebenen auf jede mögliche Weise zu verbinden suchen.

Soll eine vertikale Symmetrieebene die Zähligkeit n der gegebenen Hauptachse nicht erhöhen und durch Spiegelung keine neuen U-Achsen hervorbringen, so darf sie nur entweder durch eine U-Achse gehen oder den Winkel zweier gleichwertigen U-Achsen halbieren. Jedesmal ergeben sich sofort n S-Ebenen.

a] Symmetrie-Ebenen mit Umklappungs-Achsen zusammenfallend.

Erfüllen wir die erste Bedingung, so ist in allen diesen Gruppen eine horizontale Symmetrieebene die notwendige Folge; denn eine Umklappung samt einer Spiegelung an

einer durch die U-Achse gehenden Ebene kommt einer Spiegelung an einer zur ersten Ebene senkrechten Ebene gleich (vgl. Fig. 21, wo die U-Achse und die S-Ebene senkrecht zur Zeichenebene gelegt sind.) Mit einer horizontalen Symmetrieebene und einer in ihr liegenden U-Achse ist ebenso eine vertikale S-Ebene durch die U-Achse verbunden. Der Fall der Kombination einer horizontalen Symmetrieebene mit einer Diedergruppe kommt also hiermit zu gleicher Zeit zur Erledigung.



Bei geradzähliger Hauptachse ist nun zu jeder U-Achse eine zu dieser senkrechte S-Ebene vorhanden; graphisch fällt dann ein U-Punkt mit einem S-Punkt im Unendlichen zusammen, wodurch die Inversion zu Tage tritt. Besonders zu erwähnen wäre hier wieder die Vierergruppe mit drei zueinander senkrechten, ungleichwertigen Symmetrieebenen.

Ist dagegen die Hauptachse ungeradzählig, so wechseln die U-Punkte und die S-Punkte im Unendlichen ab; es ist also kein Inversionszentrum vorhanden.

Wir haben so eine neue Reihe von Gruppen erhalten, die der früher gefundenen Reihe der Diedergruppen ganz analog ist und deren Fundamentalbereiche gleich der oberen resp. unteren Hälfte der früheren sind und sich außerdem nur durch die geradlinigen Randkurven von jenen unterscheiden.

b) Symmetrie-Ebenen mit Umklappungsachsen abwechselnd.

Halbieren nun die vertikalen S-Ebenen die Winkel benachbarter U-Achsen, so darf nicht zugleich eine horizontale Spiegelebene vorhanden sein; denn wäre das der Fall, so würden entgegen der Annahme in den Schnittlinien der S-Ebenen ohne weiteres neue U-Achsen auftreten. Wir kämen also auf den eben erledigten Fall zurück.

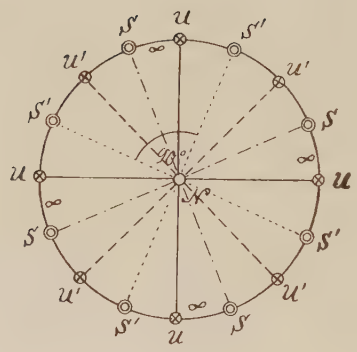


Fig. 22.

Ist die Hauptachse von gerader Zähligkeit, so existieren, wie früher bemerkt, zwei verschiedenartige Reihen von je n U-Achsen (vgl. Fig. 22). Jede S-Ebene halbiert also den Winkel zweier ungleichwertigen U-Achsen. Zwei benachbarte S-Ebenen ferner können zwar nicht durch Rotation um die Hauptachse, wohl aber durch Umklappung um die zwischen ihnen liegende U-Achse ineinander übergeführt werden; sie gelangen demnach in der Weise miteinander zur Deckung, daß die obere Hälfte einer S-Ebene mit der unteren Hälfte der benachbarten zusammenfällt. Wir können so eine Reihe von Gruppen bilden, deren geradzählige Hauptachse aus einer reinen Rotationsachse zur Drehspiegelachse von doppelter Zähligkeit geworden ist, also eine unendliche Reihe solcher vom Grade aller durch 4 teilbaren Zahlen. Von dieser Reihe ist nur die erste von kristallographischer Bedeutung. Daß diese Gruppen kein Symmetriezentrum besitzen, ersieht man daraus, daß die S- und U-Punkte alternieren.

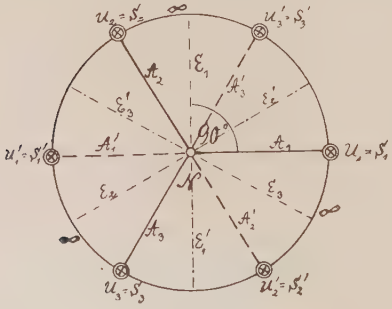


Fig. 23.

Wenn schließlich die Hauptachse ungeradzählig und daher nach Früherem nur eine Reihe von gleichberechtigte U-Achsen vorhanden ist (vgl. Fig. 23), so bilden zwei benachbarte S-Ebenen den Winkel $\frac{\pi}{n}$, können also wieder nicht durch Rotation um $\frac{2\pi}{n}$

in einander übergehen, sondern nur durch Umklappung um die zwischen ihnen liegende U-Achse. Die Hauptachse ist wieder zur Spiegelachse von doppelter Zähligkeit geworden. Aus der Reihe dieser neuen Gruppen von der Zähligkeit aller geraden, nicht durch 4 teilbaren Zahlen ist wieder nur die erste für die Kristallographie von Wert, wenn wir von dem gleich zu Anfang betrachteten Falle $n = 2$ absehen. Da hier die S- und U-Punkte aufeinanderfallen, enthalten diese Gruppen alle das Symmetriezentrum.

Mit den letzten beiden Reihen von Gruppen sind zugleich alle die Fälle erledigt, wo neben einer höherzähligen Spiegelachse als Hauptachse U-Achsen und S-Ebenen auftreten können.

Es sind aus den zuletzt gefundenen Gruppen folgende 6 als kristallographisch brauchbare aufzuzählen:

Diedergruppen mit vertikaler Symmetrieebene:

I) S-Ebenen und U-Achsen zusammenfallend:

22) Hauptachse vom Grade 2 [mit Sy.-Zentrum];
23) „ „ „ 3 [ohne „ „];
24) „ „ „ 4 [mit „ „];
25) „ „ „ 6 [mit „ „];

II) S-Ebenen und U-Achsen alternierend:

26) Die Hauptachse ist Spiegelachse vom Grade 4 [ohne Sy.-Zentrum];
27) Die Hauptachse ist Spiegelachse vom Grade 6 [mit Sy.-Zentrum].

Damit sind alle Diedergruppen und überhaupt sämtliche Gruppen mit einer einzigen höherzähligen Achse erschöpft.

C. Gruppen mit mehreren höherzähligen Achsen.

Es sind nun noch diejenigen Gruppen zu finden, die zwei oder mehr höherzählige Achsen besitzen; und hier wird die zu Anfang entwickelte graphische Darstellungsmethode erst zu voller Entfaltung gelangen, wobei auch die Gruppeneigenschaft der Spiegelungen deutlich hervortreten wird.

Einleitend sei noch bemerkt, daß wir die Gruppen zwar in voller Allgemeinheit, aber vorerst in spezieller Lage konstruieren werden, wobei Spiegelpunkte häufig ins Unendliche fallen werden. Daß sich diese Punkte stets ebenso einfach behandeln lassen wie im Endlichen gelegene Punkte, wollen wir hier an der Zusammensetzung zweier Drehungen, d. h. zweier Paare von Spiegelungen zeigen, wenn das eine S-Punktepaar im Unendlichen liegt (vgl. Fig. 24). Dann liegt der Schnittpunkt der Spuren der zwei zugehörigen S-Ebenen und der Pol ihrer Drehung in N, und von der Rotationsstrecke ist nur der Winkel übrig geblieben, unter dem sie von N aus erscheint, und der der Winkel der Richtung ist, in denen die S-Punkte im Unendlichen liegen. Ist nun eine Drehung $S_1 \cdot S_2 = R_1$, die durch zwei im Endlichen gelegene Spiegelpunkte gegeben ist, mit der genannten Drehung $R_2 = S_3 \cdot S_4$ in dieser Reihenfolge zu komponieren, so hat man die beiden zugehörigen Rotationsgeraden miteinander zum Schnitt zu bringen, man hat also den einen Spiegelpunkt S_2 nach Unendlich zu verlegen. Wird dann die Gerade um den Punkt S_1 um den Winkel der zweiten Rotation im verlangten Sinne herumgeschwenkt, so stellt das Punktepaar $S_1\ S_4$, wo S_4 im Unendlichen liegt, die resultierende Rotation dar, deren Winkel von ihrem Pole aus leicht gemessen werden kann.

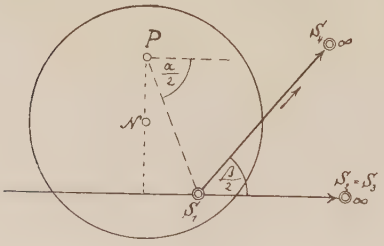


Fig. 21.

Die Zusammensetzung der Drehungen in umgekehrter Reihenfolge läßt sich ganz analog ausführen.

Das allgemeine Prinzip, das uns nun zur graphischen Konstruktion sämtlicher möglichen Spiegelungsgruppen mit mehreren höherzähligen Achsen durch ihre Gruppenbilder führen wird, ist folgendes: Wir nehmen eine durch zwei S-Punkte bestimmte n-zählige Achse als höchstzählige der Gruppe und eine weder zu ihr senkrechte noch mit ihr in einer Ebene liegende Symmetrieebene durch einen dritten S-Punkt als gegeben an, wodurch sogleich eine zweite n-zählige Achse mitgegeben ist. Wird die gegebene n-zählige Achse graphisch in die Erdachse gelegt, so folgen aus einem bei vorläufig noch unbestimmtem Einheitskreise beliebig in der Projektionsebene angenommenen Spiegelpunkte n solche, die auf einem Kreise um den Nordpol N liegend ein regelmäßiges n-Eck bilden. Diese n-Spiegelpunkte ergeben, zu zweien kombiniert, n Rotationen um n bestimmte, neue Achsen, und von diesen neuen Rotationsachsen fordern wir, daß sie n-zählig, dann (n-1)-zählig u. s. f. bis 2-zählig sein sollen. Läßt sich durch diese Forderungen der Einheitskreis, d. h. der Winkel zwischen der gegebenen Rotationsachse und den Spiegelebenen eindeutig festlegen, was in der Tat der Fall ist, so entstehen jedesmal bei Ausführung der ganzen weiteren Folge von Operationen die sämtlichen Spiegelpunkte, die mit der Ausgangskonfiguration verträglich sind.

Die reinen Drehungsgruppen erhält man durch Ersetzen der Spiegelpunkte durch Umklappungspunkte oder durch die genau analoge Konstruktion nach der stereographischen Methode: Die höchstzählige Rotationsachse wird in die Erdachse gelegt, eine zweite als Gerade beliebig in der Projektionsebene angenommen. Es folgen sofort n Gerade um N, die ein regelmäßiges n-Seit bilden, dessen Seiten nun Abschnitte von n-zähligen, dann (n-1)-zähligen u. s. f. Drehungsgeraden darstellen sollen; dadurch ist wieder der Grundkreis festgelegt, worauf sämt-

liche möglichen Rotationsachsen der einzelnen Gruppen gefunden werden können.

Bei der wirklichen Herleitung der Gruppen werden sich gegenüber dem ausgesprochenen allgemeinen Prinzip von selbst Änderungen und Abkürzungen ergeben. Weil wir, wie bemerkt, bei jeder der in Rede stehenden Gruppen von zwei höchstzähligen Achsen als Ausgangskonfiguration ausgehen, werden im Folgenden die Gruppen in dieser Weise bezeichnet und geordnet.

§ 8. Zwei dreizählige Achsen:

1a) Die „Tetraedergruppe" mit den sechs Nebensymmetrie-Ebenen in I. Stellung.

Seien nun zwei S-Punkte im Unendlichen so angenommen, daß die Erdachse zur dreizähligen Rotationsachse wird. Es folgt daraus sofort ein dritter S-Punkt im Unendlichen; je zwei dieser Punkte erscheinen von N aus unter 120°; die Richtung ihrer Lage im Unendlichen lassen wir noch unbestimmt. Ist dann ein anderer Spiegelpunkt S_1 beliebig gegeben, wobei wir vorläufig den Grundkreis und dadurch die Neigung der Spiegelebene zur Rotationsachse ganz unbestimmt lassen, so müssen aus diesem durch die Rotation um die Erdachse um $\frac{2\pi}{3}$ drei gleichwertige S-Punkte entstehen, die auf dem zu dem ersten S-Punkt gehörigen Kreise um den Mittelpunkt N liegend ein gleichseitiges Dreieck bilden. (Vgl. Fig. 25.) Soll nun, wie verlangt, das S-Punktepaar S_1, S_2 eine Rotation um $\frac{2\pi}{3}$ bewirken, so muß es vom Pol seiner Verbindungsgeraden aus unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$

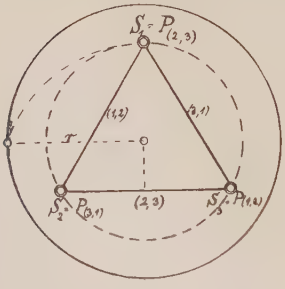


Fig. 25.

erscheinen. Der betreffende Pol muß daher der gegenüberliegende Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks über der Strecke (1, 2) sein, fällt also gerade in den dritten S-Punkt; ebenso ist nun auch Punkt S_1 Pol zur Rotationsstrecke (2, 3) und Punkt S_2 Pol zu (3, 1). Die drei S-Punkte mit ihren Verbindungsgeraden bilden also ein neuartiges „Polardreieck". Wie früher bei gegebenem Grundkreis zu einer Rotationsgeraden ihr Pol gefunden wurde, so ist hier aus einer Geraden und ihrem Pol der Grundkreis der Projektion konstruierbar, also die Neigungswinkel der durch die S-Punkte S_1, S_2, S_3 gegebenen Spiegelebenen und Rotationsachsen gegen die Erdachse festgelegt.

Durch Spiegelung des Punktes S_1 an S_2 geht ein vierter S-Punkt hervor, der mit dem aus S_2 durch Spiegelung an S_1 entstehenden S-Punkt im unendlich fernen Punkt der Geraden $S_1 S_2$ zusammenfällt. Analog entstehen noch ein fünfter und ein sechster S-Punkt (vgl. Fig. 26.) Jeder der sechs S-Punkte kann mit einem beliebigen andern durch Spiegelungen zur Deckung kommen; sie sind also gleichwertige oder „konjugierte" Symmetrieelemente. Die drei Rotationsgeraden stellen zusammen mit dem unendlich fernen Kreise vier dreizählige Rotationsachsen dar, die auch ineinander übergehen können, also „konjugiert" sind. Die drei ins Unendliche fallenden S-Punkte müssen mit den ursprünglich im Unendlichen angenommenen S-Punkten identisch sein. Wäre das nicht der Fall, so würde daraus ja eine Erhöhung der Zähligkeit der Erdachse folgen. Es kann ferner kein dritter Kreis von S-Punkten in der Gruppe auftreten, denn dann müßten die neuen S-Punkte aus dem eben genannten Grunde auf den schon gezogenen Geraden liegen, sie würden also die Zähligkeit der zugehörigen dreizähligen Rotationsachsen erhöhen.

Vervollständigen wir nun die Spiegelungsgruppe, indem wir auch die Verbindungsgeraden der S-Punkte $S_1 S_4$, $S_2 S_5$ und $S_3 S_6$ ziehen, die ja gleichfalls der Gruppe angehörende Drehungen darstellen, so erhalten wir drei neue

Rotationsgerade; die Strecken $S_1 S_4$ usw. erscheinen von ihrem Pol aus, wie man ohne Weiteres übersieht, unter einem Winkel von 90^0; die drei Rotationsachsen stellen also drei Umklappungsachsen dar, die durch die Rotationen um N ineinander übergeführt werden. Diese U-Achsen hätten wir auch durch Komposition der Rotationsstrecken $S_1 S_2$ usw. mit einer Drehung um die dreizählige Erdachse erhalten können.

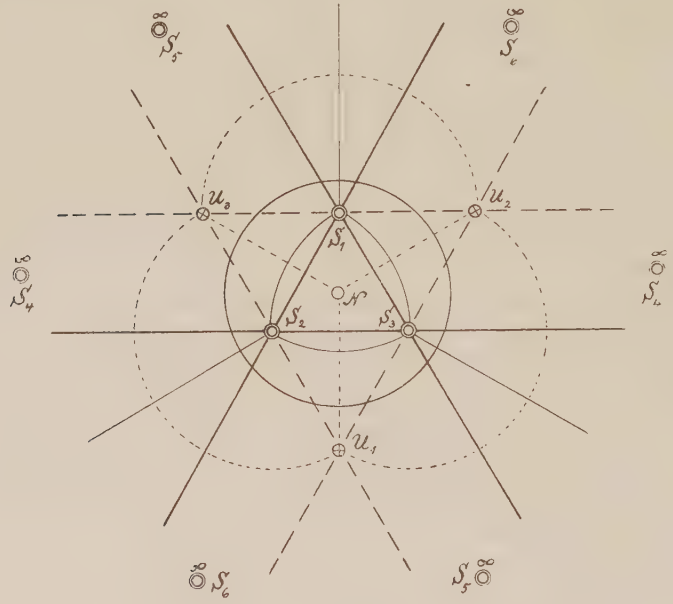


Fig. 26.

Elementargeometrisch erkennt man weiter, daß in dem von den drei U-Achsen gebildeten gleichseitigen Dreieck jede Seite den ihr zugehörigen U-Punkt im gegenüberliegenden Eckpunkt hat, daß also die Punkte U_1, U_2, U_3 ein gnomonisches „Gegenpoldreieck", also ein System von drei zueinander senkrechten U-Achsen bilden; wir haben also in unserer Gruppe eine Vierergruppe mit gleichwertigen Achsen als Untergruppe entdeckt, und zwar ist diese eine „ausgezeichnete" Untergruppe, da bei jeder

Operation der Gruppe die Elemente der Vierergruppe nur in sich vertauscht werden können. Man sieht noch, daß jede Seite des Gegenpoldreiecks eine Rotation um 180^0 darstellt, und daß die drei Umklappungen nacheinander ausgeführt jeden zu der Gruppe gehörigen symmetrischen Körper in seine Ausgangsstellung zurückführen.

Da übrigens keiner der U-Punkte mit einem S-Punkt zusammenfällt, enthält die Gruppe die Inversion nicht. Außer den elementaren zyklischen Gruppen treten keine Untergruppen weiter auf.

Was die Lage der Symmetrieebenen zu den Rotationsachsen betrifft, so liegen, da in der Projektion durch jeden S-Punkt eine zweizählige und zwei dreizählige Gerade gehen, im Raume in jeder Symmetrieebene eine zweizählige und zwei dreizählige Achsen, und zwar so, daß die zweizählige den Winkel der beiden dreizähligen Achsen halbiert. Ferner stehen die Spiegelebenen S_1 und S_4, S_2 und S_5, S_3 und S_6 zueinander senkrecht. Daß sich im übrigen sämtliche Winkel der Achsen und Ebenen zueinander leicht aus der Projektion entnehmen lassen, ist früher bemerkt worden.

Weiter beachte man, daß im Gegensatz zu den Umklappungsgeraden keine der dreizähligen Rotationsgeraden einen U-Punkt enthält; das bedeutet, daß im Raume keine zu ihnen senkrechte U-Achse existiert, die ihre beiden Enden vertauschen könnte. Die dreizähligen Achsen sind also „polar".

Man sieht schließlich noch, daß die Umklappungsgeraden aus lauter Teilstrecken bestehen, die die Verbindung eines S-Punktes mit einem U-Punkte darstellen und vom Pol der Geraden aus unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gesehen werden; die U-Achsen sind also zugleich vierzählige Drehspiegelachsen.

Die vorliegende Gruppe wird „Tetraedergruppe" benannt, weil der beschriebenen Configuration von Rotationsachsen und Symmetrie-Ebenen die Symmetrie des

regulären Tetraëders entspricht; jedoch ist das Tetraëder nicht der allgemeinste Körper von der betrachteten Symmetrie.

Durch Fortlassen des Systems der Spiegelpunkte, d. h. der Symmetrie-Ebenen, erhalten wir die zur eben erläuterten Spiegelungsgruppe gehörige reine Rotationsgruppe, die im Obigen mitbeschrieben ist, und die in der oben angegebenen Weise auch auf stereographischem Wege gefunden werden kann; ihre Symmetrieelemente, vier dreizählige polare und drei zweizählige nichtpolare Achsen, besitzt der in der Kristallographie als „tetraedrisches Pentagondodekaeder" bekannte Körper.

In die gnomonische Figur läßt sich die stereographische Projektion der Symmetrieebenen und damit zugleich der Kanten eines regulären Tetraëders, die vom Mittelpunkte der Kugel auf die Kugeloberfläche als Bögen größter Kreise projiziert sind und als vollständige Kreise die der Tetraëdergruppe entsprechende „Kugelteilung" bilden würden, leicht einzeichnen. Diese größten Kreise haben nämlich ihre graphischen Mittelpunkte in den gnomonischen Spiegelpunkten, die hier wie in allen Gruppen mit mehreren höherzähligen Rotationsachsen immer im Schnittpunkt zweier gleichzähligen Rotationsgeraden liegen müssen, und gehen durch die stereographischen Pole sämtlicher Geraden, die sich in dem betreffenden Spiegelpunkte schneiden. Die stereographischen Pole der dreizähligen Achsen fallen hier aber, wie wir wissen, mit den drei Spiegelpunkten und den drei U-Punkten unseres Gruppenbildes zusammen.

1b) Die „Tetraedergruppe" mit den sechs Nebensymmetrie-Ebenen in II. Stellung.

Wir wollen nunmehr das eben gefundene Gruppenbild in der Weise entwerfen, daß wir eine der Umklappungsachsen in die Erdachse legen.

Liegt U_1 in N, so liegen U_2 und U_3 im Unendlichen in zwei zueinander senkrechten Richtungen (vgl. Fig. 27). Die zugehörigen U-Geraden bilden also die Figur eines Achsenkreuzes mit dem unendlich fernen Kreise. Nun wissen wir, daß die S-Punkte auf den U-Geraden liegen und die Winkel der U-Punkte halbieren; vier solche liegen daher auf dem Fundamentalkreise, die beiden anderen in der Richtung der Verbindungslinie je zweier S-Punkte im

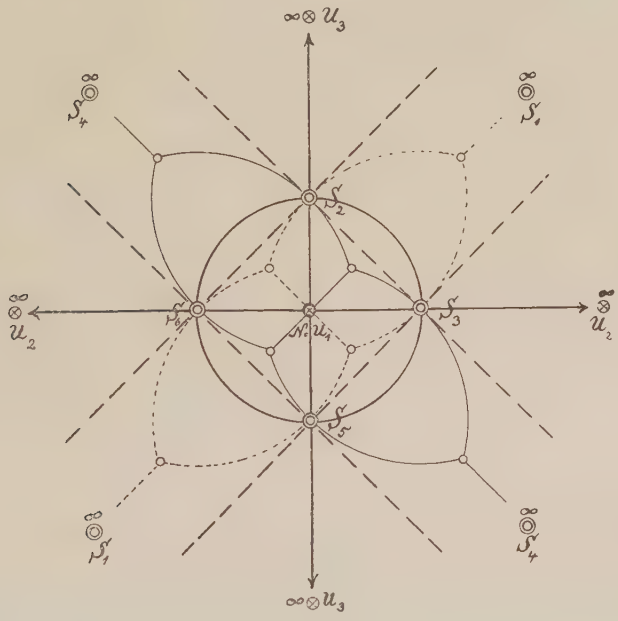


Fig. 27.

Unendlichen; die neuen Geraden sind die vier dreizähligen Achsen. Durch Fortlassen der S-Punkte erhält man wieder die reine Rotationsgruppe.

In dieser Konfiguration hebt sich die Vierergruppe von den dreizähligen Rotationsgeraden gut ab, und die für die Gruppe charakteristischen vier dreizähligen Achsen treten als gleichberechtigt deutlich hervor.

2a) Die „Tetraedergruppe“ mit den drei Hauptsymmetrieebenen in I. Stellung.

Es sei eine dreizählige Achse durch N mit drei S-Punkten S_1, S_2, S_3 gegeben, die um N ein gleichseitiges Dreieck bilden, und wir fordern, daß die Rotationen $S_1 \cdot S_2$, u. s. w. Umklappungen sein sollen (vgl. Fig. 28). Wir konstruieren danach den Fundamentalkreis und finden sofort, wie es sein muß, daß die zu den Dreieckseiten gehörenden U-Punkte in den gegenüber-

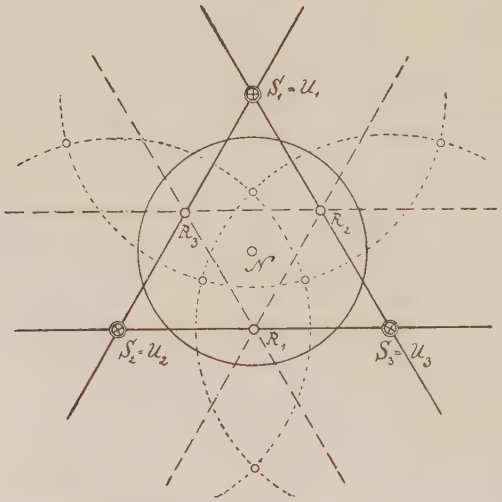


Fig. 28.

liegenden Eckpunkten mit den S-Punkten zusammenfallen. Daraus ersieht man, daß die gefundene Konfiguration wieder eine Vierergruppe darstellt und daß die neue Gruppe die Inversion enthält, woraus weiter folgt, daß die gegebene dreizählige Achse hier nicht polar sein kann und daß sie als ungeradzählige Achse zugleich eine sechszählige Drehspiegelachse sein muß.

Weitere S-Punkte ergeben sich nicht, und wir haben auch alle diejenigen Rotationsgeraden, die sich aus den Verbindungslinien der S-Punkte ergeben, gezeichnet. Es

entstehen aber durch Spiegelung der dreizähligen Erdachse an den drei S-Punkten zweifellos neue Rotationsachsen, die sich durch Komposition der gegebenen Umklappungen mit den Rotationen um die Erdachse finden lassen: Durch Anlegen der Umklappung $U_1 = (U_2 \cdot U_3)$ mit ihrem Endpunkt an Unendlich finden wir als Ausgangspunkt der Drehung den Mittelpunkt R_1 der Strecke $U_2\, U_3$ und durch Schwenkung der Geraden $R_1 \infty$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ um R_1, etwa im positiven Sinne, eine Rotationsgerade, die parallel $S_1\, S_2$ verläuft. Durch Ausführung derselben Operation auch an U_2 und U_3 ergibt sich das aus dem vorigen Gruppenbild bekannte gleichseitige Dreieck von halber Seitenlänge, dessen Seiten Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ darstellen, wie auch elementargeometrisch beweisbar. Die neuen Geraden sind also, da nun keine weiteren Rotationsachsen mehr möglich sind, mit den drei Spiegelbildern der Erdachse an den drei S-Punkten identisch. Diese sind also ebenfalls zugleich sechszählige Spiegelachsen. Dagegen sind die zweizähligen Rotationsachsen in dieser Gruppe ersichtlich nicht zu gleicher Zeit vierzählige Spiegelachsen.

Diese Drehspiegelachsen, die scheinbar nur theoretisches Interesse haben, gewinnen in der Kristallographie, wie bisher nicht beachtet zu sein scheint, praktische Bedeutung: Sie sind diejenigen, die an den Zwillingskristallen als „Zwillingsachsen“ auftreten; die zu der Spiegelachse senkrechte, hypothetische Spiegelebene, die ja niemals eine Symmetriebene des einfachen Kristalls ist, tritt dann als reale „Zwillingsebene“ in die Erscheinung. Ein Kristall der vorliegenden Gruppe das „Pentagondodekaeder“, bildet so den „Zwilling des eisernen Kreuzes“.[1])

[1]) Auch Tetraeder und Gegentetraeder zusammen sind ein Zwilling mit den vierzähligen Spiegelachsen des Tetraeders als Zwillingsachsen.

Vielleicht wäre es für die Kristallographie nicht ohne Wert, wenn der Begriff des „Zwillings“, der noch bis in die letzte Zeit Abänderungen erfahren hat, in Einklang mit dem systematisch wichtigen Begriff der „Drehspiegelung“ gebracht würde. Der so modifizierte Begriff des Zwillings scheint auch den Forderungen der Praxis zu entsprechen, und es ließen sich von dem veränderten Standpunkte aus vielleicht sogar Fragen über die noch nicht mit Sicherheit festgestellten Vertreter einzelner der 32 Kristallklassen klären. [Vgl. hierzu O. Mügge „Über die Zwillingsbildung der Kristalle“ (Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petragraphie, I. Bd., Jena 1911) und H. Baumhauer „Geometrische Kristallographie“ (ebenda, I. Bd., Jena 1911.)]

Die in der zuletzt betrachteten Spiegelungsgruppe enthaltene Gruppe der reinen Drehungen ist augenscheinlich identisch mit der im vorigen Falle aufgetretenen Gruppe der reinen Tetraederdrehungen.

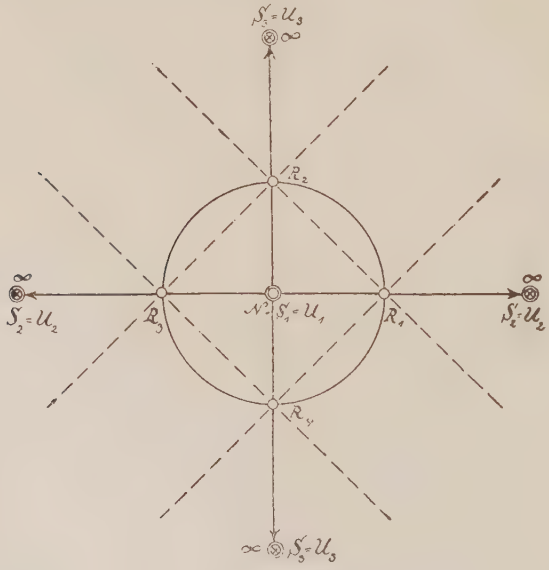


Fig. 29.

2b) Die „Tetraedergruppe" mit den drei Hauptsymmetrieebenen in II. Stellung.

Das Gruppenbild läßt sich auch hier so darstellen, daß eine U-Achse durch N geht; dann ist N zugleich ein S-Punkt und die beiden anderen S-Punkte fallen mit den U-Punkten zugleich ins Unendliche. (Vgl. Fig. 29, wo die drei Symmetrie-Ebenen in stereographischer Projektion als das Achsenkreuz mit dem Fundamentalkreis erscheinen).

Damit ist der Fall des Auftretens zweier gleichwertigen, dreizähligen Achsen völlig erledigt.

§ 9. Zwei vierzählige Achsen:

a) Die „Oktaedergruppe in I. Stellung.

Es sind nun die Gruppen mit zwei oder mehreren vierzähligen Rotationsachsen aufzusuchen.

Nehmen wir eine vierzählige Rotationsachse in der Erdachse und einen S-Punkt beliebig im Endlichen gelegen an, der mit den durch die vier Rotationen um N entstehenden S-Punkten zusammen die vier Eckpunkte eines Quadrats bildet (vgl. Fig. 30), so sollen nun die Seiten des Quadrats vierzählige Rotationsachsen sein. Die Strecke $S_1 S_2$ muß also von ihrem Pol P aus unter 45^0 gesehen werden; dieser Pol liegt auf dem Kreise, der durch die vier S-Punkte läuft. Also liegen die vier S-Punkte und die vier Pole zusammen auf einem Kreise, der innerhalb des hinzuzukon-

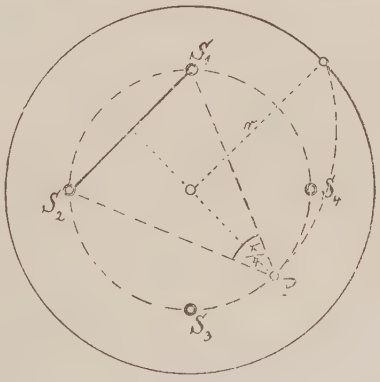


Fig. 30.

struierenden Einheitskreises liegen müßte. Daß dieser eine Rotationsstrecke als Sehne und zugleich deren Pol enthalten soll, ist ein Widerspruch. Unsere Annahme, es könnten in einer Gruppe außer einer vierzähligen Achse vier weder zu ihr senkrechte noch sie in einer Geraden schneidende S-Ebenen existieren, die zu vierzähligen Rotationsachsen führen sollen, ist also falsch. Es bleibt darum nur übrig, entweder alle vier S-Punkte nach N zu legen, wodurch wir zu einer der früheren Gruppen mit einer Hauptachse zurückgeführt würden, oder die Spiegelpunkte ins Unendliche zu legen. In diesem Falle stellen je zwei in entgegengesetzter Richtung nach Unendlich fallende Punkte nur eine Spiegelungsebene dar, und wir erhalten so zwei zueinander senkrechte gleichberechtigte Symmetrieebenen durch die vierzählige Achse. Daraus folgen aber, wie früher gezeigt, zwei neue, auf den Winkelhalbierenden jener im Unendlichen liegende, nicht mit ihnen gleichwertige S-Punkte S'_1 und S'_2.

Sind nun Gruppen mit mehr als einer vierzähligen Rotationsachse überhaupt möglich, so kann neben einer ersten nur eine zu jener senkrechte und neben dieser nur eine dritte auf der Ebene der beiden ersten senkrechte vierzählige Achse auftreten. Drei vierzählige Achsen bilden also stets ein räumliches, rechtwinkliges Achsenkreuz. Jede mögliche Gruppe mit vierzähligen Achsen enthält daher notwendig die Vierergruppe in sich und zwar als ausgezeichnete Untergruppe, da die drei vierzähligen Achsen als die einzigen der Gruppe nur ineinander übergeführt werden können. Das horizontale Achsenpaar legen wir nun, wie nicht anders möglich, in eins der beiden Symmetrieebenenpaare. Wir haben also als Ausgangskonfiguration ein Achsenkreuz mit den zweimal vier S-Punkten in der angegebenen Lage (vgl. Fig. 31).

Die Geraden (1) und (2), deren Pole P_1 und P_2 auf den Fundamentalkreis zu liegen kommen, den wir vorher beliebig eingezeichnet haben, stellen neben der Rotations-

achse durch N zwei vierzählige Achsen dar, die zu neuen S-Punkten und Rotationsgeraden Anlaß geben. Die vierzählige Achse (1) führt nämlich bei einer Rotation um $\frac{\pi}{2}$ die durch den S-Punkt S_1 dargestellte Symmetrie-Ebene nach N über, sodaß nun N zum S-Punkt S_3 wird. So ist jeder der drei S-Punkte S_1, S_2, S_3 zugleich ein U-Punkt, wodurch das Vorhandensein der Inversion in der

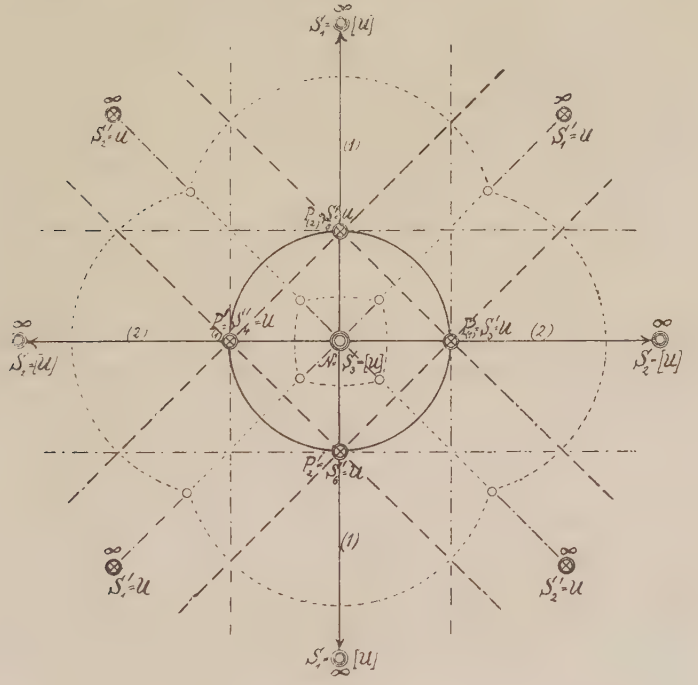


Fig. 31.

Gruppe in Evidenz tritt. Daraus folgt weiter, daß auch sämtliche etwa noch folgenden S-Punkte der Gruppe zugleich U-Punkte sein müssen. Die Konfiguration der vierzähligen Achse (1) mit den S-Punkten S_1, S_3 erfordert in der Tat, wie im eben erwähnten gleichen Falle, zwei andersartige Symmetrieebenen, deren S-Punkte ersichtlich in P_2 und P_2' der Ausgangskonfiguration liegen müssen.

Genau ebenso folgen notwendig noch zwei S-Punkte in P_1 und P_1'. Weitere S-Punkte gehen aus den vorliegenden Operationen nicht hervor.

Verbinden wir nun die vier neuen S-Punkte durch Gerade miteinander, so erkennen wir, daß die S-Punkte zweiter Art S_1' und S_2' im unendlich fernen Schnittpunkt je zweier von diesen Geraden liegen. Ein Vergleich mit den früheren Figuren überzeugt uns, daß hier das Gruppenbild der reinen Rotationsgruppe des Tetraeders in Kombination mit den zweierlei verschiedenen Systemen konjugierter S-Punkte vorliegt, die dort einzeln auftraten. Jene Gruppen sind „ausgezeichnete" Untergruppen dieser neuen Gruppe, die wegen ihrer Beziehung zum regulären Oktaeder als „Oktaedergruppe" bezeichnet wird.

Ergänzen wir das Gruppenbild durch die noch fehlenden Verbindungsgeraden der S-Punkte, so erhalten wir noch ein Rotationsgeradenpaar durch N, das gegen das erste um 45^0 geneigt ist, und vier andere Gerade, die ein den Fundamentalkreis in den vier auf ihm liegenden S-Punkten berührendes Tangentenquadrat bilden. Die sechs gleichwertigen Geraden stellen offenbar, da jede in zwei Halbgerade zerfällt, U-Achsen dar; und diese können wir auch durch ihre U-Punkte verdeutlichen, die, wie schon bemerkt, mit den sechs S-Punkten $S_1', S_2' \cdots S_6'$ zusammenfallen müssen. Die sechs U-Achsen stehen also zu den sechs Symmetrieebenen zweiter Art senkrecht und halbieren, wie die Figur zeigt, die Winkel je zweier vierzähliger ebenso wie die je zweier dreizähliger Achsen.

Wollten wir nun durch Fortlassen eines der zwei verschiedenen S-Punktsysteme neue Oktaedergruppen zu bilden versuchen, so würde auch das zweite System zugleich fortfallen müssen, da sonst die Vierzähligkeit der drei für die Gruppe charakteristischen Achsen nicht aufrecht erhalten bliebe, sich also die früher gefundenen Tetraëdergruppen wieder ergeben müßten. Wenn man aber

sämtliche S-Punkte als U-Punkte annimmt oder das Gruppenbild als stereographische Projektion auffaßt, erhält man eine neue reine Drehungsgruppe, die „Oktaederdrehungsgruppe", die keine S-Ebenen, aber alle Achsen der Hauptgruppe enthält und in der Kristallographie durch das „Gyroeder" verwirklicht wird.

Einfachere, nicht ausgezeichnete Untergruppen der Oktaedergruppe, sind die Diedergruppen. Die vierzähligen erkennt man deutlich an dem vorliegenden Gruppenbild; denn es schneiden sich vier U-Gerade in N; die zugehörigen U-Achsen liegen also in einer Ebene. Analog gibt es noch zwei andere vierzählige Diedergruppen. Die vier dreizähligen Diedergruppen sind als Schnittpunkte dreier U-Achsen in den Ecken des Tangentenquadrats sichtbar. Bemerkt sei noch, daß diese Diedergruppen die Existenz der bekannten regelmäßigen Sechsecke dartun, die man als Querschnitte des Oktaeders und ebenso des Würfels senkrecht zu einer dreizähligen Achse in der Ebene der U-Achsen erhalten kann.

Der vollen Symmetrie der Spiegelungsgruppe entspricht, wie erwähnt, das reguläre Oktaeder, aber auch dessen „reziproker" Körper, der Würfel. Beide sind Spezialfälle des allgemeinen, konvexen, von Ebenen begrenzten Körpers von derselben Symmetrie, des „Hexakisoktaeders" der Kristallographie.

Die stereographischen Projektionen dieser Körper und die vollständige „Kugelteilung" lassen sich nach den früheren Angaben auch hier leicht einzeichnen (vgl. Fig. 31, wo der Würfel eingezeichnet ist, während das Oktaeder durch Achsenkreuz und Einheitskreis dargestellt wird).

Wollten wir, dem allgemeinen Prinzip der Herleitung aller Spiegelungsgruppen folgend, nunmehr um eine vierzählige Achse vier S-Punkte legen, deren Verbindungsgeraden zuerst dreizählige und weiterhin zweizählige Rotationsachsen werden sollen, so würden wir augenscheinlich zu Gruppenbildern gelangen, die mit dem vorliegenden identisch sind.

b) Die „Oktaedergruppe“ in II. Stellung.

Legen wir nun um N als dreizählige Achse drei S-Punkte, die zu vierzähligen Drehungsachsen führen sollen, so wird sich dieselbe Gruppe in anderer Gestalt ergeben. Wir machen uns hier die Beobachtung zunutze, daß eine speziell an Unendlich angelegte geradzählige Achse, da sie stets zugleich U-Achse ist, den Ausgangspunkt der zum Unendlichkeitspunkt hinführenden Umklappung im Fußpunkt des Lotes von N auf die Rotationsgerade haben muß. Daran ist übrigens in unsern speziellen Gruppenbildern, wo die Erdachse stets als Rotationsachse angenommen ist, eine geradzählige Achse von einer ungeradzähligen immer zu unterscheiden.

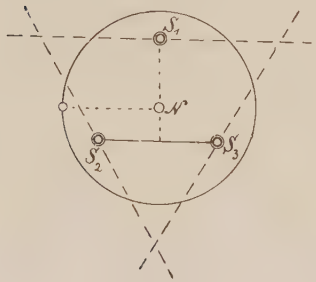


Fig. 32.

Wir haben diesmal also die nebenstehende Grundfigur (Fig. 32) als Ausgangspunkt zu nehmen. Die Seiten des gleichseitigen Dreiecks stellen Umklappungen dar, und dadurch ist der Fundamentalkreis bestimmt. Nun ergeben sich sofort die noch fehlenden drei dreizähligen Achsen als Verbindungsgeraden der drei gegebenen S-Punkte und ferner im Unendlichen und danach auch in den drei Eckpunkten des Ausgangsdreiecks noch je drei S-Punkte S'_4, S'_5, S'_6 und S_1, S_2, S_3 (vgl. Fig. 33), deren Verbindungsgeraden die noch fehlenden sechs zweizähligen Rotationsachsen darstellen. Das Gruppenbild zeigt in den drei durch N laufenden U-Geraden deutlich die dreizählige Diedergruppe. Ferner sind die vier dreizähligen Achsen zugleich Drehspiegelachsen von doppelter Zähligkeit, wofür das Zusammenfallen der U- und S-Punkte auf ungeradzähligen Rotationsgeraden das Kennzeichen ist. Auch diese sechszähligen Spiegelachsen treten in der Natur an Zwillingskristallen als Zwillingsachsen auf.

Betrachten wir nun die in dem Diagramm vorhandenen Schnittpunkte von mehr als zwei Geraden, so erkennen wir drei Arten solcher: Drei Punkte erster Art, S_1, S_2, S_3, die drei Symmetrieebenen darstellen, in deren jeder zwei vierzählige und zwei U-Achsen liegen; dann samt dem schon erwähnten Punkt N

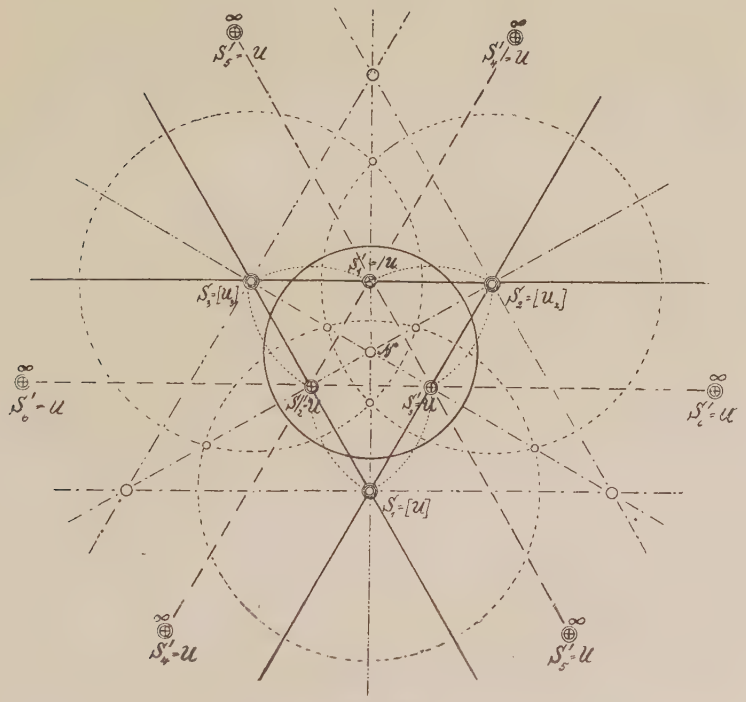


Fig. 33.

drei Punkte, in denen sich drei U-Gerade schneiden, und schließlich sechs S-Punkte zweiter Art $S'_1, \cdots S'_6$, d. h. sechs Symmetrieebenen, deren jede eine vierzählige, eine zweizählige und zwei dreizählige Achsen enthält. Die Anzahlen der verschiedenartigen Punkte stimmen genau mit den Anzahlen der drei verschiedenen Systeme konjugierter Rotationsachsen überein.

Die drei vierzähligen Achsen stellen übrigens die gnomonische Projektion des Oktaeders dar, weil die Symmetrieebenen des Oktaëders durch seine Kanten gehen und die Rotationsgeraden hier ja die gnomonischen Spuren der Symmetrieebenen darstellen. Doch gibt diese Figur, wie alle gnomonischen Projektionen, nur die Projektion der oberen Hälfte des Körpers und ist deshalb wenig anschaulich. Wollen wir die anschaulicheren stereographischen Projektionen von Oktaëder und Würfel einzeichnen, so dienen uns in bekannter Weise wieder die S-Punkte als Mittelpunkte der zu zeichnenden größten Kreise.

c) Die „Oktaedergruppe" in III. Stellung.

Die zwei Gruppenbilder der Oktaedergruppe sollen nun durch das dritte in spezieller Lage ergänzt werden, indem wir eine zweizählige Achse in die Erdachse legen. Durch Annahme eines S-Punktes S_2, aus dem durch die Umklappung um N der Punkt S_3 folgt, ist der Einheitskreis wieder bestimmt, da der Pol zu der durch N gehenden vierzähligen Rotationsgeraden S_2 S_3, von dem aus diese Strecke unter 90^0 erscheinen soll, auf dem Einheitskreis liegen muß. Damit sind dann sämtliche S-Punkte leicht bestimmbar, und wir erhalten nebenstehendes Diagramm (vgl. Fig. 34).

Dieses Gruppenbild gestattet übrigens, den wahren Winkel der dreizähligen Achsen, also auch den Flächenwinkel des regulären Oktaeders unmittelbar aus der Zeichnung zu entnehmen, da ja die genannten Achsen in Wirklichkeit senkrecht zu diesen Geraden in der Zeichenebene liegen und die Flächen des Oktaëders senkrecht zu den dreizähligen Achsen stehen.

Die stereographischen Projektionen lassen sich nach den früheren Bemerkungen auch hier mühelos einzeichnen.

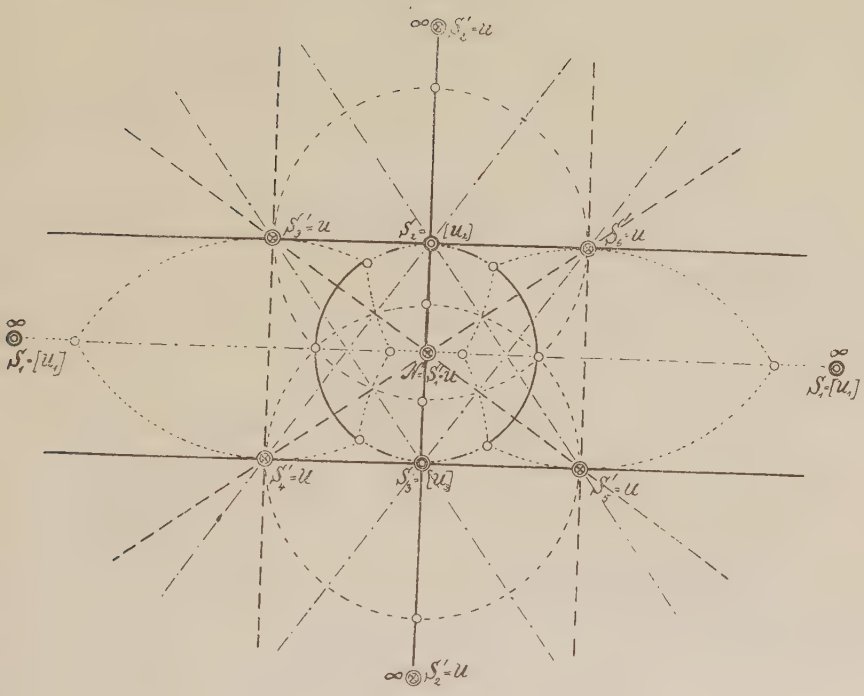


Fig. 34.

§ 10. Erledigung der Gruppen mit zwei Achsen von höherer Zähligkeit als 5.

1) Zwei geradzählige Achsen.

Die Spiegelungs- und Rotationsgruppen mit mehreren vierzähligen Achsen sind im Vorigen erledigt.

Fünfzählige Rotationsachsen haben keine kristallographische Bedeutung mehr, dagegen wieder sechszählige. Da aber läßt sich analog wie im Falle mehrerer vierzähligen Achsen zeigen, daß von solchen höchstens drei zu einander senkrechte in einer Gruppe auftreten könnten; doch auch das wäre schon ein Widerspruch, da

eine solche Gruppe mindestens vier Achsen vom Grade 6 enthalten müßte, da aus einer zweiten durch Rotation um die erste sechszählige Achse sofort zwei neue Achsen entstehen müßten. Ebenso gilt für geradzählige Achsen von höherem als dem vierten Grade ganz allgemein, daß es keine solchen Spiegelungs- oder Rotationsgruppen mit einer endlichen Anzahl von Operationen geben kann.

Sechszählige und höherzählige geradzählige Achsen können also nur Gruppen mit einer Hauptachse, d. h. Diedergruppen bilden.

Weiter können Gruppen mit mehr als einer Spiegelachse vom Grade $n > 6$ in der Kristallographie nicht vorkommen, und die mit mehreren vierzähligen und sechszähligen Spiegelachssn sind schon miterledigt; mit ihnen können umgekehrt keine anderen als die in den betreffenden Gruppen vorkommenden Rotationsachsen in Kombination treten, und solche müssen stets vorhanden sein, da ja das Produkt zweier Drehspiegelungen gleich einer reinen Rotation ist. Spiegelachsen sind nach Definition immer geradzählig, solche von nicht durch 4 teilbarer Zähligkeit führen auf ungeradzählige Rotationsachsen zurück, die unten erledigt werden sollen, und von solchen, deren Zähligkeit ein Vielfaches von 4 ist, wären nur noch die vom Grade 8 zu erwähnen, da ja die höherzähligen geradzählige Rotationsachsen von höherem als dem vierten Grade in sich enthalten, die zu mehreren, wie eben erkannt, keine endlichen Gruppen mehr erzeugen können. Drei zueinander senkrechte achtzählige Spiegelachsen aber haben die drei zu ihnen senkrechten Hauptebenen als Symmetrieebenen zur Folge, verlieren damit also ihren Charakter als eigentliche Spiegelachsen. Deshalb können sie in der Oktaëdergruppe, zu der damit zurückführen, nicht mehr als Spiegelachsen bezeichnet werden.

Die im letzten Abschnitt gefundenen Spiegelungs- und Drehungsgruppen sind also die einzigen, die noch als

Kristalle auftreten können; wir haben also den 27 bisher gefundenen Klassen als letzte anzufügen:

28) Die Tetraedergruppe mit den 6 Nebensymmetrieebenen;
29) „ „ „ mit den 3 Hauptsymmetrieebenen;
30) „ „ -Drehungsgruppe;
31) „ Oktaeder-Spiegelungsgruppe;
32) „ „ -Drehungsgruppe.

Damit ist die schon mehrfach gefundene Anzahl 32 aller theoretisch möglichen Symmetrieklassen der Kristalle erreicht.

2) Zwei ungeradzählige Achsen.

Wir wollen uns nun graphisch veranschaulichen, daß auch Gruppen mit zwei oder mehr ungeradzähligen Achsen von höherem als dem fünften Grade notwendig zu unendlich vielen Achsen führen. Nur der vorläufig zurückgestellte Fall zweier fünfzähligen Achsen wird sich späterhin als wirklich zu einer endlichen Gruppe führend erweisen.

Wir nehmen als Beispiel für den allgemeinen Fall zwei siebenzählige Achsen an und legen eine Achse nach N und sieben S-Punkte als Eckpunkte eines regelmäßigen 7-Ecks um N herum (vgl. Fig. 35). Die Seiten des 7-Ecks sollen nun Rotationen um $\frac{2\pi}{7}$ darstellen. Der Pol jeder Seite liegt dann in der gegenüberliegenden Ecke; wir erhalten also auch hier

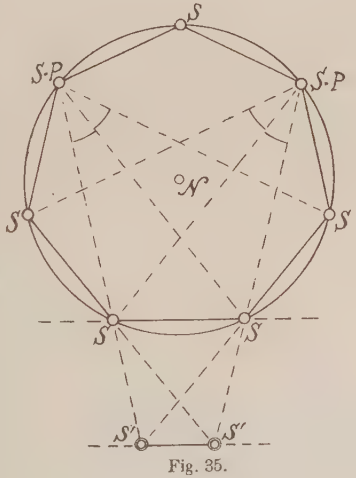


Fig. 35.

wieder eine zu sich selbst „polare" Figur. Der Fundamentalkreis kann nun bestimmt werden. Konstruieren wir jetzt nach Vorschrift neue Spiegelpunkte, deren sämtliche Verbindungsstrecken ja Drehungen der Gruppe darstellen, so erkennen wir bei der speziellen Lage der Figur unschwer, daß Strecken hinzukommen, die sicher kleinere Drehungen als solche um $\frac{2\pi}{7}$ darstellen. Der neue Rotationswinkel kann nun entweder ein irrationaler Teil von $\frac{2\pi}{7}$ sein, was nach Früherem sofort eine unendliche Gruppe zur Folge hat, oder er ist ein rationaler Teil von $\frac{2\pi}{7}$, etwa $\frac{m}{n} \cdot \frac{2\pi}{7}$. Dann ist aber nach Früherem auch $\frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi}{7}$ eine in der Gruppe auftretende Rotation. Bei geradem n ergäbe sich sofort der Widerspruch von mindestens $\frac{7 \cdot n}{2}$ geradzähligen Achsen; bei ungeradem n könnten wir mit zweien dieser höher als siebenzähligen ungeradzähligen Achsen die Schlußweise wiederholen, sodaß wir auch hier schließlich, da der Prozeß konvergiert, zu unendlich vielen Achsen gelangen würden. Für reine Rotationsgruppen gilt mutatis mutandis genau dasselbe.

Allgemein gilt nunmehr also: Zwei gleichwertige Achsen von höherem als dem zweiten Gerade können nur dann eine endliche Gruppe erzeugen, wenn ihr Grad nicht höher als fünf ist.

§ 11 Zwei 5-zählige Achsen.

1) Die „Ikosaedergruppe" in I. Stellung: Das „Pentagramm."

Wir wenden uns nun dem Falle zweier gleichwertigen, fünfzähligen Achsen zu, der zwar für die Kristallographie keine Bedeutung mehr hat, mathematisch aber von um so höherem Interesse ist.

Wir legen wieder eine Achse in die Erdachse und konstruieren auf einem beliebigen Kreise um N durch stetige Teilung des Radius ein regelmäßiges Fünfeck, in dessen Ecken wir fünf Spiegelpunkte annehmen. Jede Seite soll eine Rotation um $\frac{2\pi}{5}$ darstellen, also ist jeder S-Punkt zugleich Pol der gegenüberliegenden Seite, das regelmäßige Fünfeck also wieder zu sich selbst „polar". Der Fundamentalkreis ist damit festgelegt und die Neigung der fünf Spiegelebenen gegen die Rotationsachse bestimmt. Durch Spiegelung der S-Punkte an einander erhalten wir auf jeder der fünf durch zwei S-Punkte laufenden Rotationsgeraden noch drei andere S-Punkte, von denen einer nach Unendlich fällt. Nun fallen aber wegen der elementargeometrischen Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks bei Ausführung der Spiegelungen je zwei im Endlichen liegende, neue S-Punkte in einen Punkt zusammen, sodaß die fünf Rotationsachsen ein „Pentagramm" bilden (vgl. Fig. 36). In dessen fünf

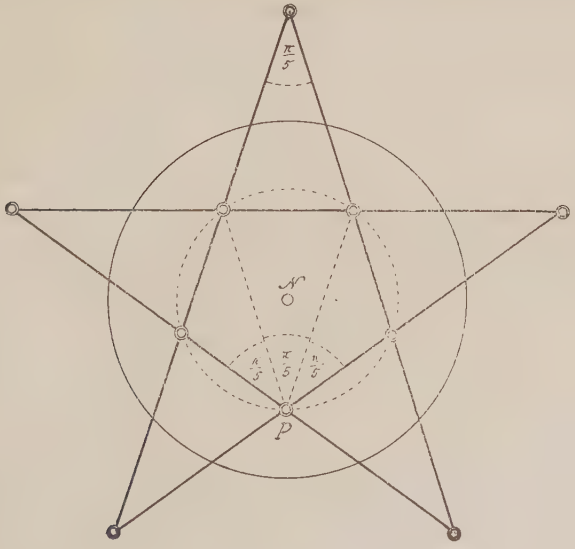


Fig. 36.

Eckpunkten schneiden sich nun je zwei Gerade unter dem Winkel $\frac{\pi}{5}$; deshalb ist jeder der neuen S-Punkte in stereographischer Auffassung der zu dem gegenüberliegenden Fünfeckspunkt gehörende, diametrale Pol einer Seite des regelmäßigen Fünfecks. Ferner ist jeder äußere Abschnitt einer Seite des Pentagramms gleich der Diagonale des Fünfecks, und daher werden zwei benachbarte Abschnitte jeder Pentagrammseite als Ganzes durch den auf ihnen liegenden Eckpunkt des Fünfecks nach dem goldenen Schnitt geteilt. Die fünf ins Unendliche fallenden S-Punkte liegen auf der dem Punkt N entsprechenden unendlich fernen Rotationsgeraden. Wir haben also insgesamt 15 S-Punkte, die in den 15 Schnittpunkten der 6 fünfzähligen Rotationsgeraden liegen und alle ineinander übergeführt werden können, also „konjugiert" sind. Weitere S-Punkte ergeben sich nicht. Die vorliegende Gruppe besitzt also keine ausgezeichneten Untergruppen, sie ist völlig einheitlich gebaut.

Ziehen wir nun die anderen möglichen Geraden zwischen den 15 S-Punkten (vgl. Fig. 37), so erhalten wir zunächst durch Verbinden benachbarter, noch nicht verbundener Punkte die 5 Diagonalen des ursprünglichen Fünfecks und die 5 Seiten eines größeren regelmäßigen Fünfecks, das die äußeren Ecken des Pentagramms verbindet. Jede dieser Geraden enthält, da eine jede einer Seite des Ausgangsfünfecks parallel ist, im Unendlichen einen dritten S-Punkt; alle 10 müssen also, wenn sie sich in die Gruppe einordnen lassen sollen, dreizählige Rotationsachsen darstellen. Daß das so ist, folgt aus den Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks durch elementare Rechnung.

Weiter lassen sich noch dreimal 5 Gerade zwischen je zweien der 15 S-Punkte ziehen; erstens 5 solche, die je einen Eckpunkt des Ausgangsfünfecks mit dem ihm gegenüberliegenden äußeren Eckpunkt des Pentagramms verbinden, zweitens zweimal je 5 Gerade, die einen Eckpunkt

des Fünfecks und ebenso einen Eckpunkt des Pentagramms mit dem unendlich fernen S-Punkt der zwischen ihnen liegenden Fünfeckseite verbinden. Auf jeder dieser 15 Geraden liegen nur zwei S-Punkte, sie werden also 15 U-Gerade darstellen. Für die ersten 5 folgt das daraus,

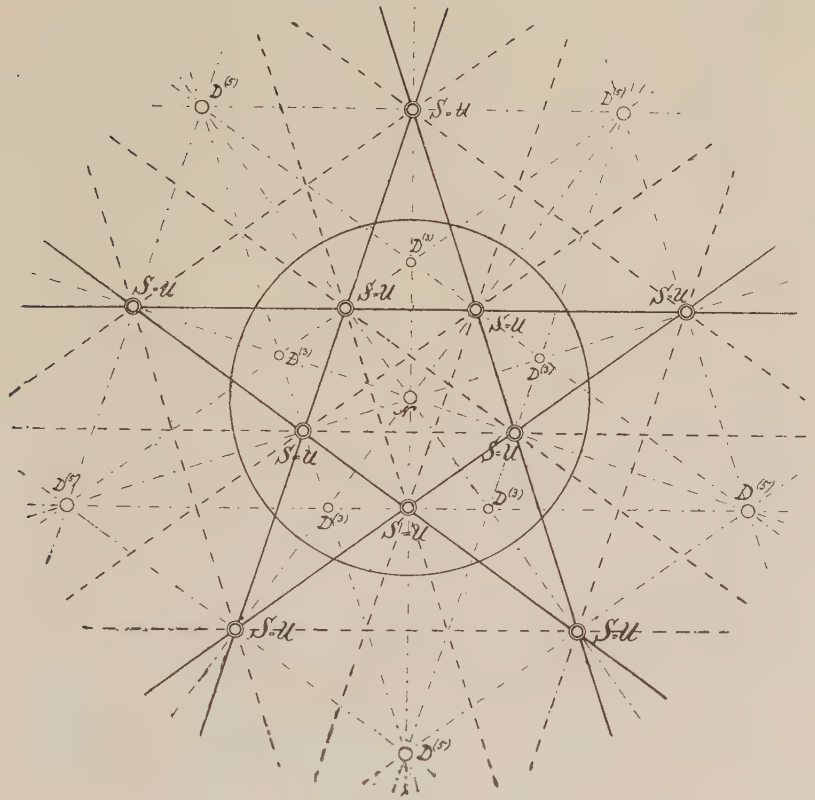


Fig. 37.

daß jede, wie oben bemerkt, zwei stereographisch diametrale Punkte verbindet, deren Verbindungsstrecke also von dem zugehörigen Pol aus unter einem rechten Winkel erscheinen muß; für die 10 anderen erkennt man es, da der eine Spiegelpunkt im Unendlichen liegt, hier wieder

an der Lage des anderen S-Punktes im Fußpunkte der Senkrechten von N auf die U-Achse.

Die Konfiguration der 6 fünfzähligen, 10 dreizähligen und 15 zweizähligen Achsen nebst den 15 Symmetrieebenen ist nun dieselbe, die im Raume zur Erzeugung des regulären Ikosaeders führt, wenn man in jedem Durchstoßpunkt einer dreizähligen Achse mit der Einheitskugel eine normale Ebene errichtet, wodurch der Körper im ganzen von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, oder auch zu dem regulären Dodekaeder, wenn man senkrecht zu jeder fünfzähligen Achse eine Ebene legt, wodurch der Körper insgesamt von 12 regulären Fünfecken umschlossen wird. Ikosaeder und Dodekaeder sind ebenso wie Oktaeder und Würfel oder Tetraeder und Gegentetraeder „reziproke" Körper. Die 15 U-Achsen halbieren bei beiden Körpern die 30 vorhandenen Kanten.

Um die 15 U-Punkte in dem Gruppenbilde zu finden, beachten wir, daß die zu den fünf durch N gehenden U-Achsen gehörigen U-Punkte im Unendlichen mit den S-Punkten zusammenfallen, die auf der sie senkrecht schneidenden Fünfeckseite liegen. Hieraus folgt schon, daß die Gruppe die Inversion enthält. Auch die 10 übrigen U-Punkte müssen nun mit den 10 übrigen S-Punkten zusammenfallen. Wir hatten schon bemerkt, daß gegenüberliegende Eckpunkte von Fünfeck und Pentagramm stereographisch diametrale Kugelpunkte, gnomonisch also Gegenpol und Fußpunkt des auf die Gegenpolare gefällten Lotes darstellen; und da die beiden U-Geraden zur Verbindungslinie der beiden Punkte senkrecht stehen, so ist in der Tat jeder dieser 10 Punkte der U-Punkt zu der durch seinen Gegenpol laufenden U-Geraden.

Hieraus folgt nun zugleich die bedeutsame Tatsache, daß jedes Paar parallel laufender U-Geraden samt der zu ihm senkrechten U-Geraden eine Vierergruppe bildet; und da durch N im ganzen fünf U-Gerade mit den dazu senkrechten U-Geraden gehen, also fünf Tripel solcher Zusammenordnungen von U-Achsen vorhanden

sind, so enthält die Gruppe insgesamt fünf Vierergruppen als Untergruppen, die aber nicht ausgezeichnete sind, da sie bei den Rotationen um N und ebenso um jede andere fünfzählige Achse als Ganzes ineinander übergeführt werden.

Da weiter die U-Achsen jedes Tripels gleichberechtigt und nicht polar und da vierzählige Achsen nicht vorhanden sind, bilden sie nach Früherem notwendig mit je vier dreizähligen Achsen zusammen die räumliche Figur des Tetraeders mit seinem Gegentetraeder. Die acht Endpunkte der vier dreizähligen Achsen bilden also die Eckpunkte eines Würfels. Damit ist der Grund der bekannten Tatsache aufgedeckt, daß sich die 20 Ecken eines Dodekaeders durch fünf sich durchdringende Tetraeder oder Würfel darstellen lassen.

2) Die „Ikosaedergruppe" in II. Stellung.

Das gefundene Gruppenbild wollen wir nun in solcher Stellung konstruieren, daß eine dreizählige Achse in die Erdachse zu liegen kommt; diese Konstruktion läßt sich wieder unter Zuhilfenahme eines Winkels von 72°, also einer einzigen stetigen Teilung ausführen (vgl. Fig. 38). So entsteht ein Diagramm von dreizähliger Rotationssymmetrie um N, bei dem drei S-Punkte ins Unendliche fallen. Hier tritt das von früher bekannte Tetraedergruppenbild, das gleichseitige Dreieck mit dem ihm umbeschriebenen von doppelter Seitenlänge, deutlich hervor, und zwar erkennt man um N zwei Tetraedergruppen, die aber durch die Drehungen um diese Achse nicht ineinander übergeführt werden. Die Endpunkte ihrer dreizähligen Achsen stellen vielmehr im Raum zwei sich durchdringende fest verbundene Würfel mit gemeinsamer dreizähliger Achse dar; und das sind die bekannten zwei Würfel „in dodekaedrischer Durchdringung".

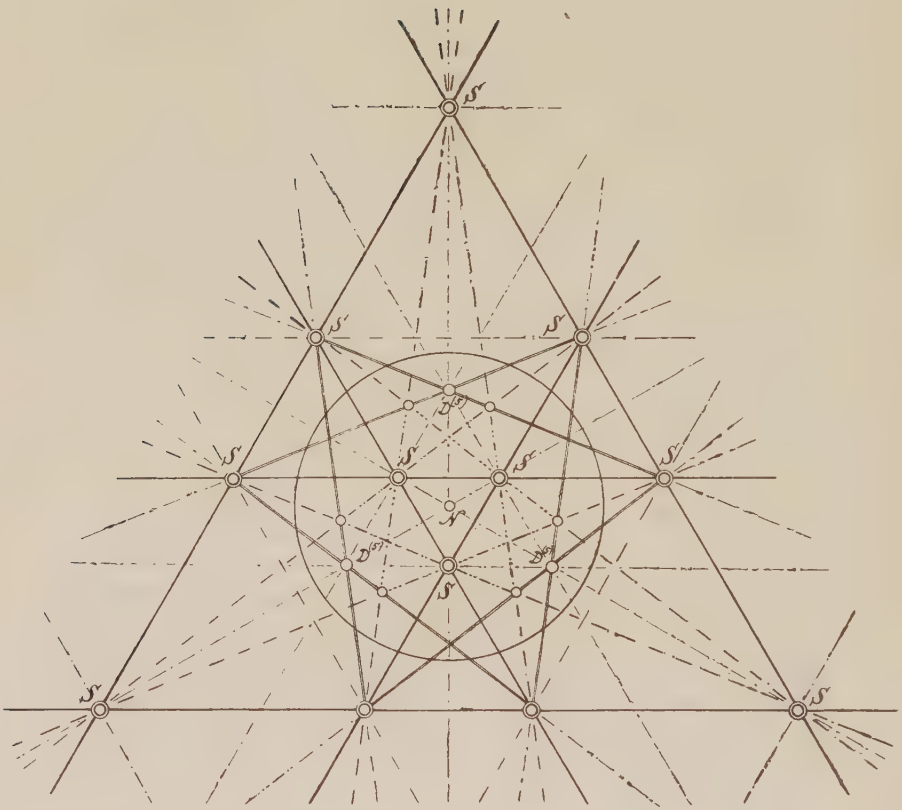


Fig. 38.

3) Die Ikosaedergruppe in III. Stellung.

Wollen wir nun noch das Gruppenbild des Ikosaeders so entwerfen, daß in der Erdachse eine U-Achse liegt, so kommen wir nach Annahme eines beliebigen S-Punktes nicht über eine Diedergruppe hinaus; und einen zweiten S-Punkt beliebig anzunehmen haben wir nicht mehr die Freiheit. Wir gehen daher von der in der Gruppe enthaltenen Tetraederuntergruppe aus, die bei dieser Lage ja ein Quadrat mit seinen Dia-

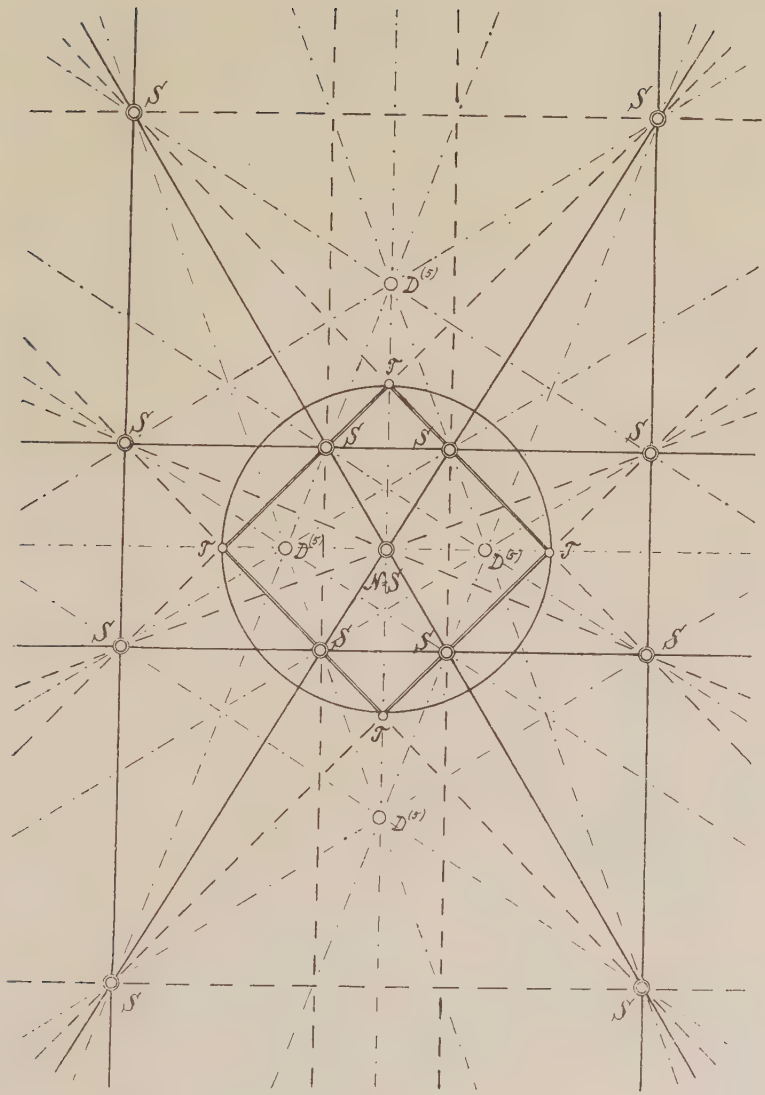


Fig. 39.

gonalen bildet (vgl. Fig. 39), und werden dann unter Zuhilfenahme einer der vorigen Figuren mittels des unver-

änderten Doppelverhältnisses irgend eines vierten Punktes zu drei bekannten Punkten einen neuen S-Punkt in seiner Lage zu dem Tetraedergruppenbilde finden können, aus dem sich dann alle übrigen S-Punkte ohne Weiteres ergeben werden:

Wir suchen in einem der früheren Gruppenbilder drei Punkte einer dreizähligen Rotationsgeraden auf, die den drei Schnittpunkten einer der vier dreizähligen Rotationsgeraden einer Tetraedergruppe mit den drei andern entsprechen. Von den drei entsprechenden Punkten in der neuen Figur liegt einer im Unendlichen. Nehmen wir dann einen der drei S-Punkte, die auf jeder dreizähligen Rotationsgeraden zu finden sind, als vierten Punkt hinzu, so läßt sich mittels des Doppelverhältnisses dieser vier Punkte ein S-Punkt in der neuen Figur konstruieren.

Beachten wir aber noch, daß die Winkel der zwischen bestimmten Punkten einer Rotationsgeraden liegenden Strecken, wie sie vom Pol der Geraden aus erscheinen, d. h. die wahren Winkel, erhalten bleiben, so können wir, da in der neuen Figur durch die Tetraedergruppe schon drei Punkte einer dreizähligen Geraden und damit sogar drei Strahlen vom Pol aus gegeben sind, durch Entnehmen eines geeigneten Winkels aus einer früheren Figur und Antragen an den entsprechenden Strahl in der neuen Figur einen S-Punkt und danach unschwer alle übrigen finden.

Der Punkt N wird hier notwendig zum S-Punkt; die Ikosaedergruppe enthält also die Tetraedergruppe mit den drei Hauptsymmetrieebenen als Untergruppe.

Im letzten Gruppenbild tritt, wie in den zwei früheren, immer wieder der goldene Schnitt auf. Während dort regelmäßige Fünfecke und Dreiecke, vom innersten aus größer werdend, eine stetige Reihe bilden, finden wir hier ähnlich eine Reihe von Quadraten mit ihren Diagonalen. Darum können wir schließlich auch die Bemerkung zum Ausgangspunkt der Konstruktion der dritten Figur nehmen, daß, wie nicht schwer zu beweisen, die

auf den Seiten des Tetraedergruppenquadrats liegenden S-Punkte diese Seiten stetig teilen. Es führt also auch hier wieder eine einzige stetige Teilung zum Ziele.

Seinen besonderen Wert erhält das letzte Gruppenbild dadurch, daß sowohl zwei fünfzählige wie zwei dreizählige und zwei U-Achsen in der Zeichenebene liegen; deshalb lassen sich deren gegenseitige wahre Winkel, wie auch die Flächenwinkel des Ikosaeders und des Dodekaeders unmittelbar aus der Zeichnung entnehmen.

Betrachten wir noch zusammenfassend in den drei Gruppenbildern des Ikosaeders die verschiedenen Arten von Punkten, in denen sich mehr als zwei Gerade schneiden. Außer den 15 S-Punkten, in deren jedem sich zwei fünfzählige, zwei dreizählige und zwei zweizählige Achsen schneiden und zwar so, daß die U-Achsen, wie man bei der speziellen Lage der Figuren erkennt, immer die Winkel zweier fünfzähligen und zweier dreizähligen Achsen halbieren, — was also besagt, daß jede Symmetrieebene des Ikosaeders und des Dodekaeders drei Paare verschiedenzähliger Achsen in dieser Lage zu einander enthält, — fallen die 6 Punkte auf, in denen sich je fünf U-Achsen treffen. Diese beweisen die Existenz von Diederuntergruppen fünften Grades. Zu jeder Ebene, die fünf solche U-Achsen enthält, steht eine der 6 fünfzähligen Achsen senkrecht, und jede solche Rotationsachse ist eine Drehspiegelachse von doppelter Zähligkeit; denn die Ebene der fünf U-Achsen ist keine Spiegelebene, und die U-Achsen alternieren mit den durch die Diederhauptachse gehenden Spiegelebenen. Damit steht im Einklang, daß jede fünfzählige Achse Zwillinge von zwei sich durchdringenden Ikosaedern bilden kann, die um $\frac{2\pi}{10}$ gegeneinander gedreht sind.

Die ferner noch auftretenden Schnittpunkte je dreier U-Achsen sind schon aus der Tetraedergruppe bekannt; sie zeigen, daß jede dreizählige Rotationsachse des Iko-

saeders Hauptachse einer Diedergruppe dritten Grades ist. Zugleich sind die dreizähligen Rotationsachsen wiederum Spiegelachsen vom Grade 6, und diese Achsen können Zwillinge zweier Dodekaeder bilden. Die übrigen 15 Punkte, in denen sich zwei 3-zählige und eine 2-zählige Achse schneiden, sind ebenfalls schon in der Tetraedergruppe aufgetreten.

Sehr beachtenswert ist noch die in allen drei Gruppenbildern auftretende Reziprozität, die sich schon in folgender Gegenüberstellung zeigt:

6 Geraden mit je 5 U-Punkten,
10 „ „ „ 3 „ ,
15 „ „ „ 2 „

entsprechen

6 Punkte mit je 5 U-Geraden,
10 „ „ „ 3 U- „ ,
15 „ „ „ 2 U- „ ,

wobei die ins Unendliche fallenden Geraden und Punkte mitgezählt sind. Damit ist aber die Reziprozität noch nicht erschöpft.

Das Einzeichnen der stereographischen Projektionen des regulären Ikosaeders und des regulären Dodekaeders bezw. der der Gruppe entsprechenden vollständigen Kugelteilung ist auch hier wieder in allen drei Fällen nach den früheren Angaben sehr einfach ausführbar.[1])

[1]) Man vgl. hierzu die Zeichnungen bei E. Heß „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung“ (Leipzig 1883) und die Tafel bei F. Klein „Vorlesungen über das Ikosaeder“.

III. Kapitel.

Die Gruppenbilder in allgemeiner Lage.

Es wird nicht ohne Wert sein, die bisher in spezieller Lage zur Projektionsebene entworfenen Gruppenbilder nun auch in allgemeiner Lage zu konstruieren.

Hierbei wird es sich aber nicht um eine allgemeine projektive Abbildung handeln; denn dadurch würde der so nützliche Zusammenhang zwischen der gnomonischen und der stereographischen Projektion verwischt werden. Es sollen vielmehr die beiden Projektions-Ebenen und -Centren in ihrer Lage zu einander und zur Einheitskugel unverändert bleiben und nur die Symmetrieelemente der Gruppen in ihrer Stellung gegen die Projektionsebenen beliebig angenommen werden.

Die Stellung eines um den Mittelpunkt der Einheitskugel beweglichen Systems von Symmetrieelementen ist durch drei Achsen im Raume, in der Projektionsebene also durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmt. Wir müssen also, um unsere Gruppen zu erhalten, beliebig gelegene Ausgangsdreiecke so konstruieren, daß ihre Seiten Rotationen darstellen, die zu den gesuchten Spiegelungs- und Rotationsgruppen hinführen. Da, wenn wir von den einfacheren Gruppen absehen, zwei gleichzählige Rotationsachsen von höherem als dem zweiten Grade alle möglichen Gruppen wirklich erzeugen, so hätten wir nur Dreiecke zu konstruieren, von denen zwei Seiten Rotationsgerade von gleicher Zähligkeit darstellen, während

die dritte Seite von gleicher oder niederer Zähligkeit ist. Diese wohl mit Schwierigkeiten verbundene allgemeine Herleitung läßt sich aber vermeiden, indem man die Gruppen auf der in allen Gruppen mit mehreren höherzähligen Achsen enthaltenen Vierergruppe aufbaut, die sich auch in allgemeiner Lage leicht konstruieren läßt.

§ 1. Die Vierergruppe:

Das Dreiseit.

Ein Dreieck aus drei U-Punkten stellt immer dann und nur dann eine Vierergruppe dar, wenn jeder Eckpunkt der „Gegenpol" der gegenüberliegenden Seite ist.

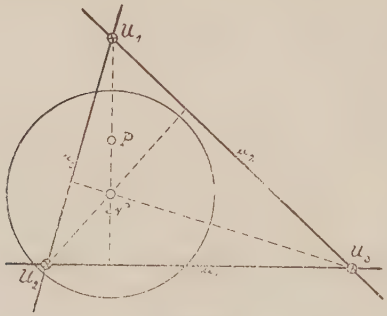


Fig. 40.

Nimmt man bei gegebenem Fundamentalkreis eine Spur u_1 beliebig an (vgl. Fig. 40), so läßt sich U_1 als „Gegenpol" zu u_1 nach Früherem finden. Der zweite U-Punkt U_2 muß nunmehr auf u_1 liegen, wo man ihn beliebig annehmen darf. Damit ist aber die Gerade u_3 und somit der zugehörige „Gegenpol" U_3 festgelegt. Jedes „Gegenpol"-Dreieck hat nun, wie die Konstruktion zeigt, das Centrum N des Grundkreises zum Höhenschnittpunkt. Wir können daher auch umgekehrt drei beliebige Punkte einer Ebene, die nur der Bedingung unterworfen sind, Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks zu sein, als Repräsentanten einer Vierergruppe auffassen; wir brauchen in diesem Dreieck nur den Schnittpunkt der drei Höhen zu bestimmen, worauf sich der zugehörige gnomonische Fundamentalkreis leicht konstruieren läßt.

§ 2. Die Oktaedergruppe: Das vollständige Vierseit.

Wir können nun die Vierergruppe sofort zur Oktaedergruppe erweitern, indem wir die U-Achsen als die drei zu einander senkrechten, vierzähligen Achsen der Oktaedergruppe betrachten. Dazu haben wir nur von den Polen der U-Achsen aus die rechten Winkel zu halbieren, wodurch wir die sechs andern Fundamentalpunkte der Oktaedergruppe erhalten (vgl. Fig. 41). Je drei der neu gefundenen Schnittpunkte liegen auf einer Geraden, und durch Verbinden dieser Punkte ergeben sich die vier dreizähligen Rotationsgeraden.

Mit diesen sieben Geraden haben wir die bekannte Figur eines vollständigen Vierseits gewonnen, in welchem die vier Seiten durch die vier dreizähligen und die drei Diagonalen durch die drei vierzähligen Achsen gebildet werden. Das hier vorliegende Vierseit ist aber nicht ein allgemeines; denn es läßt sich nicht von vier beliebigen Geraden als dreizähligen Rotationsgeraden aus konstruieren. Wir können die Figur der Oktaedergruppe durch Einzeichnen der sechs zweizähligen Achsen vervollständigen, die sich als die Verbindungsgeraden der drei Diagonalpunkte mit den zwei nicht mit ihnen auf einer Geraden liegenden Eckpunkten des Vierseits darstellen.

Diese Figur läßt sich genau wie die früheren speziellen Gruppenbilder beschreiben. Durch Einzeichnen der Spiegelpunkte ergibt sich die Oktaederspiegelungsgruppe, und durch stufenweises Fortlassen der zwei Spiegelpunktsysteme und der zweizähligen Geraden können wir von ihr aus wieder bis zur reinen Tetraederdrehungsgruppe hinabsteigen.

Die stereographischen Projektionen der zugehörigen regulären Körper und die vollständigen Kugelteilungen

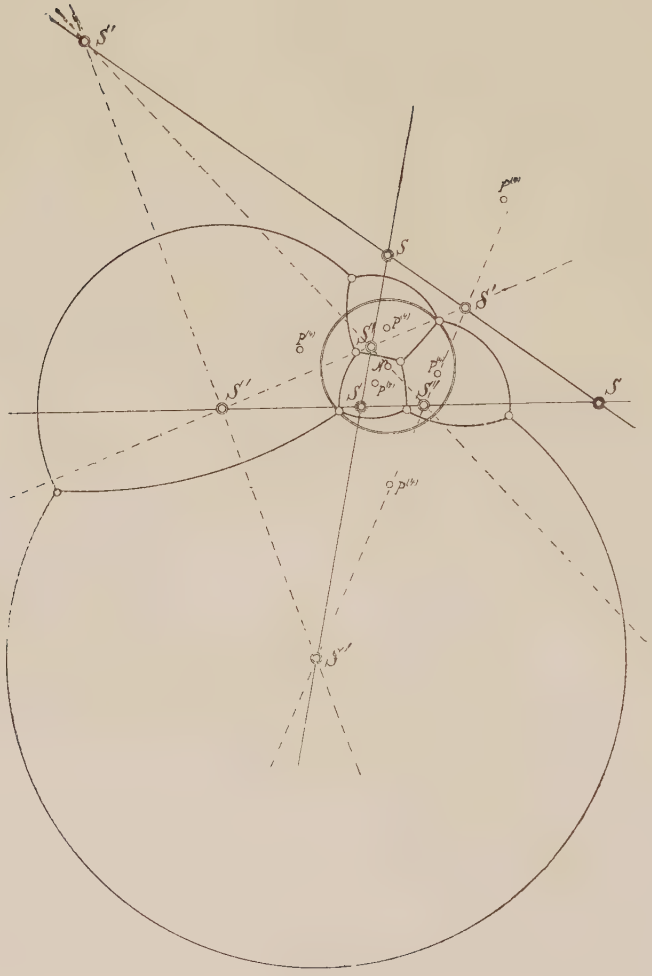


Fig. 41.

lassen sich wieder wie früher als größte Kreise um die Spiegelpunkte einzeichnen (vgl. Fig. 41).

§ 3. Die Ikosaedergruppe:

Das vollständige Pascalsche Sechsseit.

Das Ikosaedergruppenbild in allgemeiner Lage bauen wir auf einer der darin enthaltenen Tetraedergruppen auf, deren Bild wir in allgemeiner Lage, von der Vierergruppe ausgehend, uns gezeichnet denken. Dazu haben wir, analog wie bei der Konstruktion der Ikosaederkonfiguration der III. Stellung, den ersten U- bezw. S-Punkt entweder unter Benutzung eines aus einer der früheren Figuren zu entnehmenden Doppelverhältnisses oder einfach durch Antragen eines geeigneten Winkels an einen Strahl des Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt der Pol einer dreizähligen Rotationsgeraden der Tetraederkonfiguration ist, zu bestimmen, aus dem sich dann alle übrigen Punkte leicht ergeben.

Auf dem Untergrunde dieser Figur lassen sich die stereographischen Projektionen sowohl eines Ikosaeders wie eines Dodekaeders oder auch die allgemeine Kugelteilung ebenfalls in bekannter Weise ausführen (vgl. Fig. 42).

In diesem allgemeinen Gruppenbild treten sämtliche 15 U- bezw. S-Punkte und alle übrigen mehrfachen Schnittpunkte der drei- und zweizähligen Rotationsgeraden ins Endliche, und in dieser Figur haben wir in neuer Auffassung eine Konfiguration vor uns, die in ihrer allgemeinsten projektiven Gestalt als „Hexagrammum mysticum" seit langem bekannt und wegen ihrer Bedeutung viel besprochen worden ist, und deren Auftreten in der mathematischen Literatur wir nun verfolgen wollen.

Zugleich soll im Anschluß daran Einiges über die bisherigen Versuche, graphische Darstellungen für die Eigenschaften von Gruppen zu geben, und zum Schluß etwas über die allgemeinste Gestalt symmetrischer Körper angefügt werden.

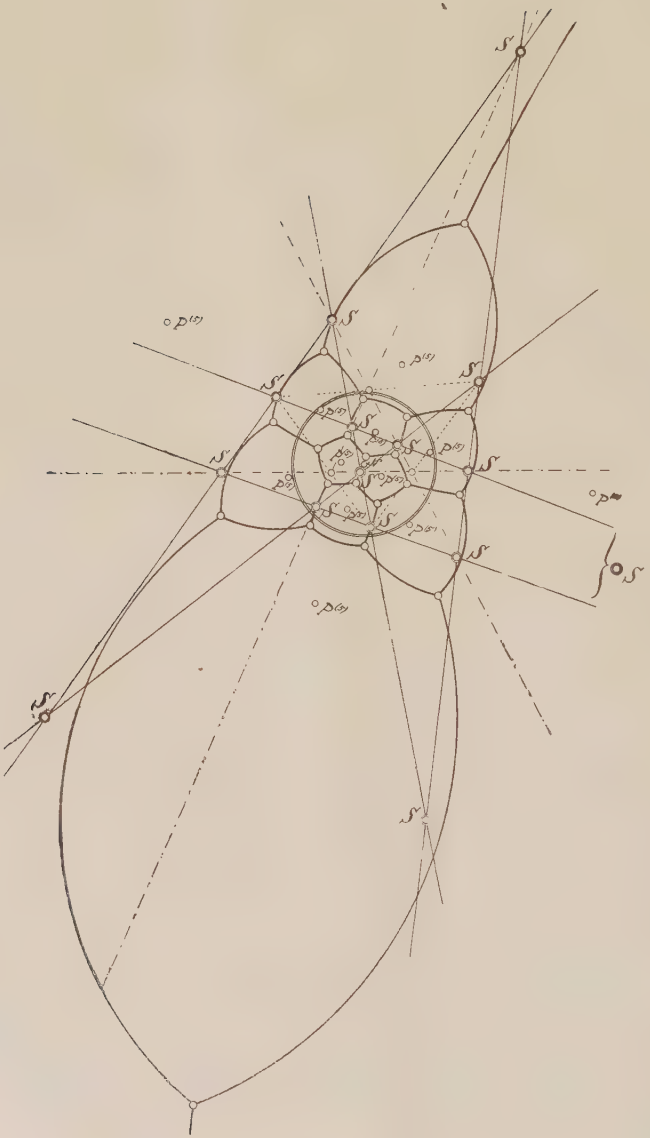


Fig. 42

Anhang.

§ 1. Geschichtliches über das „Hexagrammum mysticum".

Schon in einer Abhandlung vom Jahre 1829 gibt Plücker in „Crelles Journal" ausführliche Beweise einer Gruppe von Sätzen, die das „vollständige" Pascalsche Sechseck betreffen. Er weist dort auf eine Reihe von Sätzen hin, die Steiner im Jahre 1828 als „Théorèmes sur l'Hexagrammum mysticum" ohne Beweis in Gergonne's „Annales des math." hatte veröffentlichen lassen. Im Jahre 1846 ist dann A. Cayley, 1847 wiederum Plücker und 1851 O. Hesse auf denselben Gegenstand zurückgekommen. In einer Abhandlung vom Jahre 1868 „Über die Reziprozität der Pascal-Steinerschen und der Kirkman-Cayley-Salmonschen Sätze von dem Hexagrammum mysticum" (Crelle, 68) zeigt dann O. Hesse die Reziprozität von Punkten und Geraden dieses Hexagramms auf, die der oben angegebenen Aufzählung reziproker Elemente in den Ikosaedergruppenbildern ähnlich ist. Er gesteht am Schlusse der Abhandlung, daß „es ihm nicht gelungen ist, das vermutete Reziprozitätsgesetz zu entdecken". Er kann nur eine „gewisse Art der Polarität" nachweisen, aber nicht „den zugehörigen Kegelschnitt entdecken, der die Reziprozität vermitteln soll".[1]) An das ebene Bild der vollständigen Figur des Pascalschen Sechsecks knüpft noch L. Wedekind i. J. 1880 an (Math. Ann. 16). Dort findet sich eine Übersicht der auf diesen Gegenstand bezüglichen Abhandlungen, deren nicht weniger als neunzehn angegeben werden. Wedekind weist auch auf die Entdeckung von Veronese hin, daß sich aus einem vollständigen Pascalschen Sechsseit stets unendlich viele ableiten lassen.

[1]) Man vergleiche die interessanten Sätze auf S. 204 der Hesseschen Abhandlung.

In dieser Hinsicht läßt sich über unser erstes Ikosaedergruppenbild dasselbe sagen, daß sich nämlich wegen des Auftretens der stetigen Teilung die Reihe der größer oder auch kleiner werdenden regelmäßigen Fünfecke nach beiden Richtungen bis ins Unendliche fortsetzen läßt. Unsere Figur wäre also als das „Pentagrammum mysticum" zu bezeichnen. Es hat aber immer nur ein Pentagramm die reale Bedeutung des Ikosaedergruppenbildes, und einer Änderung in der Wahl des Pentagramms müßte eine Änderung des Maßstabes d. h. des Radius der Einheitskugel folgen.

Die vorliegende Abhandlung bildet so in gewissem Sinne eine „Ehrenrettung" des „Pentagramms", dieses merkwürdigen Zeichens, das schon den Pythagoräern bekannt gewesen sein soll und späterhin als sogenannter „Drudenfuß" im deutschen Volksaberglauben als zauberhaftes Mittel gegen alles Unheil gegolten hat, wie es ja auch in Goethes „Faust" an der eingangs zitierten Stelle in diesem Sinne verwandt wird. Rein gruppentheoretisch betrachtet versinnbildlicht ja das Pentagramm unter allen überhaupt möglichen Gruppen die bei weitem einheitlichste und harmonischeste Gruppe und zwar in der vollkommensten Weise. Es darf also bei seiner mit reichstem Inhalt gepaarten Einfachheit als die denkbar vollkommenste, ebene, geradlinige Figur bezeichnet werden und könnte daher nicht mit Unrecht als das Symbol der Vollkommenheit, der höchsten Harmonie und damit als tiefster Gegensatz, als Feind alles Unvollkommenen, Unharmonischen, Schlechten gelten.

Von einer ganz anderen Richtung her ist A. Clebsch auf die genannte Konfiguration gekommen, die er als „zehnfach Brianchon'sches Sechseck" bezeichnet; und in seiner Abhandlung „Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünf-

seits" (Math. Ann. 4 [1871]) deckt er den Zusammenhang der Figur mit der von ihm sogenannten „Diagonalfläche" auf und erörtert deren Zusammenhang mit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Kurz darauf endlich erkannte F. Klein, daß überraschenderweise die sechs Fundamentalpunkte der von ihm nunmehr „Clebsch'sches Sechseck" benannten Konfiguration einfach als die stereographischen Projektionen der sechs fünfzähligen Rotationsachsen aufgefaßt werden können, die die Ecken eines regulären Ikosaeders bilden. („Vorlesungen über das Ikosaeder" Anm. S. 216 und S. 218 und Math. Ann. 12 [1877]). An die Konfiguration des Clebsch'schen Sechsecks knüpfen weiterhin noch E. Hess und H. Schröter (Math. Ann. 28 [1887]) an, wo die auch in unsern Diagrammen sichtbaren mehrfach perspektiv liegenden Dreiecke den Gegenstand der Betrachtung bilden.

§ 2. Über frühere graphische Veranschaulichungen von Gruppen.

In F. Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder" knüpfen sich zum ersten Male an die stereographische Projektion der Kugelteilung der Ikosaedergruppe, die nunmehr an die Stelle der früheren Konfiguration tritt, gruppentheoretische Erörterungen an. Um die zu den Gruppen der regulären Körper in ihrer Kugelteilung gehörenden Operationen mehr hervortreten zu lassen, hat dann A. Cayley in die stereographischen Projektionen Streckenzüge eingezeichnet und solche farbig ausgeführten Figuren „Color Diagrams" genannt.[1]) Weiterhin hat dann H. Maschke, nunmehr wieder unter Fortlassung der stereographischen Projektionen der Körper, den Zusammenhang der Operationen

[1]) Eine Reproduktion eines solchen „Color Diagrams" findet sich als Titelblatt in W. Burnside's „Theory of groups of finite order" 2. Aufl. (Cambridge 1911.)

der endlichen Gruppen durch bloße Polygonzüge, die in bestimmter Richtung zu umlaufen sind, veranschaulicht (vgl. H. Maschke „The Representation of finite groups especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams". Amer. Journ. of Math. Vol. 18 [1896], woselbst sich viele schöne Figuren finden). Ganz neuerdings verwendet M. Dehn zur Erforschung der Eigenschaften topologischer Gruppen „Gruppenbilder", die er durch „Streckenkomplexe" darstellt (Math. Ann. 69 [1910]).[1])

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich in den „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von R. Fricke und F. Klein (Bd. 1, S. 69—74) die Gruppenbilder des Dieders, Oktaeders und Ikosaeders in der Gestalt finden, wie sie durch allgemeine projektive Abbildung aus unseren gnomonischen Projektionen entstehen würden.

Ein Blick auf die genannten graphischen Veranschaulichungen von Gruppen zeigt den Fortschritt der hier angewandten Methode. Die Runge'sche Darstellung der Operationen der Spiegelung und Drehung hat sich als geeignet erwiesen, alle theoretisch möglichen Gruppen nicht nur zu veranschaulichen, sondern vor allem graphisch abzuleiten.[2])

§ 3. Über die allgemeinste Gestalt symmetrischer Körper.

Wenn wir von den höherzähligen zyklischen und Diedergruppen absehen, existiert nur eine recht eng begrenzte Anzahl von verschiedenen Symmetrieklassen. Ihnen steht eine große Fülle von Einzelgestalten sym-

[1]) Dort findet sich auch ein Gruppenbild der Ikosaedergruppe.

[2]) Überdies scheint der Nutzen der Methode in gruppentheoretischer und in noch anderer Hinsicht hiermit nicht erschöpft zu sein.

metrischer Körper gegenüber, weil innerhalb des einzelnen Fundamentalbereichs die Abgrenzung des Körpers gegen den Außenraum noch ganz beliebig angenommen werden kann.

Die Kristallographie ordnet die große Zahl derjenigen Körper, die, abgesehen von Zwillingsbildungen, konvex sind und von ebenen, dem „Gesetz der rationalen Kantenschnitte" gehorchenden Flächen begrenzt werden.

Darüber hinaus gibt es eine unbegrenzte Zahl äußerlich sehr kompliziert gebauter, kristallographisch unmöglicher Körper, die zwar noch von Ebenen begrenzt werden, deren Flächen sich aber gegenseitig durchdringen und einspringende Kanten und Ecken bilden. Solche Körper werden als Kepler'sche Körper bezeichnet. (Vgl. M. Brückner „Vielecke und Vielflache" [Leipzig 1900]). Jeder solche Körper enthält aber einen innersten, konvexen Kern, der die Symmetrie einer unserer Gruppen besitzt, und höhere als fünfzählige Achsen können auch da natürlich nicht auftreten.

Hier wären auch die sogenannten Projektionen der vierdimensionalen regulären Körper in den dreidimensionalen Raum zu nennen, (vgl. Schoute „Mehrdimensionale Geometrie" II. Teil [Leipzig 1905]). Diese Körper bestehen aus mehreren übereinandergelagerten Schichten von perspektivisch verzerrten, regulären Körpern des gewöhnlichen Raumes und enthalten ebenfalls keine andere als die Symmetrie der gefundenen Gruppen.

Wollen wir den allgemeinsten, einer Symmetriegruppe entsprechenden Körper bilden, so dürfen wir auf jedem vom Kugelmittelpunkt ausgehenden Strahl, sofern wir nur innerhalb des Kegels bleiben, der durch den Mittelpunkt und einen Fundamentalbereich der Kugeloberfläche begrenzt ist, beliebig viele Punkte in beliebiger Entfernung von einander annehmen, die beliebig viele sich irgendwie durchdringende krumme Flächen bilden.

Können wir im allgemeinen auch von Körpern mit mehrfacher Überdeckung absehen, so müssen wir uns

doch von der Vorstellung symmetrischer Körper als von solchen mit ebenen Begränzungsflächen in gewissem Maße frei machen. So werden wir uns bei der Vierergruppe mit drei Symmetrieebenen nicht immer eine achtflächige Doppelpyramide sondern gegebenenfalls z. B. ein dreiachsiges Ellipsoid vorstellen. Und seitdem sich in den allerletzten Jahren das Interesse der Naturwissenschaft nicht nur der Struktur der Kristalle d. h. der Gruppierung der Atome, sondern auch der Erforschung des symmetrischen Baues des Einzel-Atoms oder -Moleküls zuwendet, stellt man sich diese in der Tat nicht von Ebenen und scharfen Kanten, sondern wohl auch von ebenmäßig verlaufenden, gekrümmten Flächen umgeben vor.

Lebenslauf.

Ich, Vitalis Geilen, Sohn des Stadtrats und früheren Kaufmanns Joseph Geilen und seiner Frau Rosa geb. Krämer, bin am 1. September 1884 zu Bischofstein in Ostpreußen geboren und katholischer Konfession. Nach Absolvierung des Gymnasiums zu Rössel habe ich von Ostern 1904 ab je ein Semester in Freiburg i. B., München und Braunsberg, darauf drei Semester in Münster i. W. und von Ostern 1907 bis Herbst 1910 in Göttingen hauptsächlich reine und angewandte Mathematik, daneben Physik, Chemie mit Mineralogie und Philosophie studiert.

Meine Lehrer in der Mathematik waren insbesondere die Herren

Killing und v. Lilienthal in Münster

und die Herren

Hilbert, Klein, Landau, Minkowski, Runge, Toeplitz, Voigt und Wiechert in Göttingen,

denen allen ich zu Dank verpflichtet bin.

Im Juni 1909 habe ich in Göttingen das Staatsexamen für das höhere Lehramt bestanden und bin seit Herbst 1910 je ein Jahr am Gymnasium zu Göttingen und am Realprogymnasium zu Kamen i. W. und vom Oktober 1912 ab bis jetzt an der Oberrealschule zu Münster i. W. tätig gewesen.

Im gegenwärtigen Kriege ist meine Lehrtätigkeit durch siebenmonatigen Heeresdienst, vom Juli 1915 bis Februar 1916, unterbrochen worden.

Meinen ganz besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle Herrn Geheimrat C. Runge in Göttingen aussprechen, nicht nur für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für die mir dabei gewährte, fördernde Unterstützung, sondern auch dafür, daß er mir für die Lösung der Aufgabe seine im Druck bisher nicht veröffentlichte Methode der graphischen Darstellung von Spiegelungen zur Verfügung gestellt hat.